第一章　空间与形式

7　双线性型

7.2　对称双线性型

本节的主要结果是

定理 7.12 设 F 的特征不等于 2 且 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 则 V 中有一组基使得 f 在该基下的矩阵是对角阵.

证明该定理需要对称双线性型的极化公式. 设 F 的特征不等于 2 且 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 则对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right). \tag{1}$$

验证如下:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right) && \text{(双线性)} \\
&= \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\right) \\
&= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). && \text{(对称性)}
\end{aligned}$$

定理 7.12 的证明. 如果 f 是零映射, 则 f 在 V 的任意基底下的矩阵都是零矩阵. 定理显然成立. 设 f 不是零映射.

再设 $n = \dim(V)$. 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, 定理显然成立. 设 $n > 1$ 且定理对 $n-1$ 成立.

由极化公式 (1), 存在 $\mathbf{e}_1 \in V$ 使得 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0$. 令

$$W = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) = 0\}.$$

可直接验证 W 是子空间. 我们来证明

$$V = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus W. \tag{2}$$

首先, 设 $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{e}_1 \rangle \cap W$. 则 $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{e}_1$, 其中 $\lambda \in F$, 且 $f(\lambda \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0$. 于是 $\lambda f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0$. 因为 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0$, 所以 $\lambda = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由第一章第一讲定理 1.11 (iii), $\langle \mathbf{e}_1 \rangle + W$ 是直和. 由第一章第二讲命题 4.15, 只要证明 $\dim(W) = n-1$ 即可. 考虑线性映射

$$\begin{aligned} \phi\colon\ V &\longrightarrow \quad F \\ \mathbf{x} &\ \mapsto \ \ f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

则 $W = \ker(\phi)$. 因为 $\phi(\mathbf{e}_1) \neq 0$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) \geq 1$. 但 $\mathrm{im}(\phi) \subset F$ 且 $\dim F = 1$. 于是 $\mathrm{im}(\phi) = F$. 特别地 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = 1$. 由对偶公式(第一章第二讲命题 4.14(iii)), $\dim(W) = n-1$. 直和分解 (2) 成立.

设 $g \in \mathcal{L}_2(W)$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. 由归纳假设存在 W 的一组基 $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 使得 g 在该基下的矩阵是对角的, 即对任意的 $i, j \in \{2, 3, \ldots, n\}, i \neq j$,

我们有 $g(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=0$. 由 (2), $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 线性无关 (见第一章第一讲定理 1.11 (ii))且 $\dim(V)=n$. 于是 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 由 W 的定义可知 $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_1)=0$, $i=2,3,\ldots,n$. 在由 f 的对称性可知

$$f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_i)=0,\quad i=2,3,\ldots,n.$$

综上所述 $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=0$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ 且 $i\neq j$. 于是 f 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是对角阵. □

定义 7.13 设 $f\in\mathcal{L}_2^+(V)$, f 在 V 的基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是对角阵. 则称 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 f 的一组规范基. 设双线性型 f 在一组规范基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. 则

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda_1x_1y_1+\cdots+\lambda_nx_ny_n$$

称为与规范基对应的规范型, 其中 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n$.

推论 7.14 设 F 的特征不等于 2, $A\in\mathrm{SM}_n(F)$. 则 A 合同于一个对角阵.

证明. 考虑双线性型

$$\begin{array}{cccc} f: & F^n\times F^n & \longrightarrow & F \\ & \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} & \mapsto & (x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}. \end{array}$$

因为 A 对称, 所以 f 对称. 由上述定理存在 F^n 的一组基使得 f 在该基下的矩阵是对角阵 B. 则 $A \sim_c B$. $\square$

例 7.15 求 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} P$$

是对角矩阵.

解. 设 f 是 $\mathbb{R}^3$ 上对称双线性型, 它在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的矩阵是 A.

步骤 1. 选取 ϵ_1 使得 $f(\epsilon_1, \epsilon_1) \neq 0$. 令 $\epsilon_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. 则

$$\begin{aligned} f(\epsilon_1, \epsilon_1) &= f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ &= f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 2. \end{aligned}$$

步骤 2. 确定 $W = \ker(f(\mathbf{x}, \epsilon_1))$ 的一组基. 我们计算

$$f(\mathbf{x}, \epsilon_1) = (x_1, x_2, x_3) A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + 2x_3.$$

解方程 $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ 得到 W 的一组基

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

步骤 3. 求 $g := f|_{W\times W}$ 在 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 下的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) & f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \\ f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) & f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

到此降维到 W 上的对称双线性型 g.

步骤 1. 选取 ϵ_2 使得 $g(\epsilon_2, \epsilon_2) \neq 0$. 令 $\epsilon_2 = \mathbf{w}_1$.

步骤 2. 确定 $Z = \ker(g(\mathbf{x}, \epsilon_2))$ 的一组基. 我们计算

$$g(\mathbf{y}, \epsilon_2) = (y_1, y_2)B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2y_1 - 2y_2.$$

解方程 $-2y_1 - 2y_2 = 0$ 得到解空间的一组基

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies Z \text{ 的基是 } (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

于是, f 在 $\mathbb{R}^3$ 中的一组规范基是

$$\epsilon_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

从 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 到 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 的矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算得

$$P^tAP = \mathrm{diag}(2, -2, -2).$$

推论 7.16 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 且 $\mathrm{rank}(f) = r$. 则存在 V 的一组规范基使得 f 在该基下的矩阵是

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in F \setminus \{0\}$.

证明. 由定理 7.12, 存在 f 规范基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. 于是,

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ 且 } i \neq j.$$

因为 $r = \mathrm{rank}(A)$, 所以在 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)$ 中恰好有 r 个非零. 适当调整下标后, 我们可以得到一组新的规范基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 满足 $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$,

$$f(\epsilon_i, \epsilon_i) \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, r,\ \text{ 且 } f(\epsilon_j, \epsilon_j) = 0,\ j = r+1, r+2, \ldots, n.$$

令 $\lambda_i = f(\epsilon_i, \epsilon_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 即可. □

推论 7.17 设 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 且 $\mathrm{rank}(A) = r$. 则存在 F 中非零元素 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 使得 $A \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$.

证明. 由上述推论直接可得. □

例 7.18 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{C})$ 且 $r = \mathrm{rank}(A)$. 则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

证明. 由推论 *7.17*, $A \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 是非零复数. 由代数学基本定理 $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}$ 是复数. 令

$$P = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r}\right).$$

则 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 且对称. 直接计算

$$\begin{aligned} A &\sim_c P^t \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0) P \\ &= \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7.3 雅可比(Jacobi)公式

设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 矩阵 A 的子式

$$M\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k \end{pmatrix},$$

其中 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 称为 A 的一个 k 阶主子式. 特别地,

$$M\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, k \\ 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}$$

称为 A 的 k 阶顺序主子式.

例 7.19 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的三个顺序主子式分别是

$$a_{11}, \quad \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \det(A).$$