第一章　空间与形式

定理 7.20 *(Jacobi 公式)* 设 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$. 设 $\Delta_0 = 1$, Δ_i 是 A 的 i 阶顺序主子式. 如果 $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ 都非零. 则

$$A \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right).$$

证明. 设 $A = (a_{i,j})_{n\times n}$. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时,

$$A = (a_{1,1}) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right).$$

结论成立. 设 $n > 1$ 且 $n-1$ 时结论成立. 设 B 是由 A 的前 $(n-1)$ 行和 $(n-1)$ 列元素组成的子矩阵. 则 B 对称且它的 $n-1$ 个顺序主子式是 $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$. 由归纳假设可知

$$B \sim_c \underbrace{\operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\right)}_{C}.$$

于是存在 $P \in \mathrm{GL}_{n-1}(F)$ 使得 $P^t B P = C$. 令

$$Q = \begin{pmatrix} P & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

则

$$Q^tAQ = \begin{pmatrix} P^t & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^t & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{w} = P^t\mathbf{v}$. 对 Q^tAQ 用初等行伴列变换并注意到 C 对称, 我们得到

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ -\mathbf{w}^t\left(C^{-1}\right)^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^t & a_{n,n} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_{n-1} & -C^{-1}\mathbf{w} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

$$= \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ O_{1\times(n-1)} & \lambda \end{pmatrix} R, \quad \text{其中 } \lambda \text{ 是 } F \text{ 中某个元素},$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} C & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & \alpha \end{pmatrix}}_{M}, \quad \text{其中 } \alpha \text{ 是 } F \text{ 中某个元素}.$$

最后, 我们来验证 $\alpha = \Delta_n/\Delta_{n-1}$. 由上述推导得出

$$C = P^tBP \quad \text{和} \quad M = R^tQ^tAQR.$$

因为 $\det(C) = \Delta_{n-1} = \det(B)$, 所以由上述第一个等式蕴含 $\det(P)^2 = 1$. 而上述第二个等式蕴含

$$\Delta_{n-1}\alpha = \Delta_n \det(P)^2 \implies \alpha = \Delta_n/\Delta_{n-1}. \quad \square$$

例 7.21 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_3(\mathbb{R}).$$

计算对角阵 $B \in \mathrm{SM}_3(\mathbb{R})$ 使得 $A \sim_c B$.

解. 因为不需要计算转换矩阵 P. 我们可以试试利用 *Jacobi* 方法. 但 A 的一阶主子式等于零. 于是, 我们通过行列相伴变换得到

$$A \sim_c B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} \frac{2}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\det(B)}{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

例 7.22 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_2(\mathbb{Z}_2).$$

证明 A 不合同于对角方阵.

证明. 设

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$$

使得 $P^tAP = \mathrm{diag}_2(u,v)$. 则

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac & ad+bc \\ ad+bc & 2bd \end{pmatrix} = \mathrm{diag}_2(u,v).$$

于是 $u = v = 0$ ($\because\ 2 = 0$). 由此可知 $\mathrm{rank}(A) = 0$. 矛盾.

8 二次型 (quadratic forms)

我们从双线性型的角度引入二次型, 这样可以使我们可以直接应用双线性型的结论. 然后我们说明二次型和二次齐次多项式之间的关系. 在本节中 V 是域 F 上的有限维线性空间, F 的特征不是 2.

8.1 从双线性型到二次型

定义 8.1 设 $q : V \longrightarrow F$ 称为 V 上的二次型, 如果

(i) 对于任意的 $\mathbf{v} \in V$, $q(\mathbf{v}) = q(-\mathbf{v})$;

(ii) 对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y}))$$

是 V 上的对称双线性型. f 称为 q 的配极.

注解 8.2 设 q 是 V 上的二次型. 则 $q(\mathbf{0})=0$. 这是因为在上述定义条件 *(ii)* 中代入 $\mathbf{x}=\mathbf{y}=\mathbf{0}$, 得到

$$0=f(\mathbf{0},\mathbf{0})=-\frac{1}{2}q(\mathbf{0}) \implies q(\mathbf{0})=0.$$

下面的命题说明二次型和配极之间的关系.

命题 8.3 *(i)* 设 q 是 V 上的二次型, 其配极是 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$. 则对任意的 $\mathbf{x}\in V$, $q(\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

(ii) 设 $f\in\mathcal{L}_2^+(V)$. 则 $q(\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})$ 是一个以 f 为配极的二次型.

证明. (i). 由定义 8.1 中的 (ii) 和 (i) 可知.

$$\begin{aligned}-f(\mathbf{x},\mathbf{x})&=f(\mathbf{x},-\mathbf{x})\overset{(ii)}{=}\frac{1}{2}(q(\mathbf{0})-q(\mathbf{x})-q(-\mathbf{x}))\\&=-\frac{1}{2}(q(\mathbf{x})+q(-\mathbf{x}))\overset{(i)}{=}-q(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

于是, $q(\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

(ii) 直接计算得 $q(-\mathbf{x})=f(-\mathbf{x},-\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})=q(\mathbf{x})$. 由对称双线性型的极化公式定义 8.1 中 (ii) 成立. □

推论 8.4 设 q 是 V 上的二次型. 则对任意的 $\alpha\in F$ 和 $\mathbf{v}\in V$, $q(\alpha\mathbf{v})=\alpha^2q(\mathbf{v})$.

证明. 设 $f\in\mathcal{L}_2^+(V)$ 是 q 的配极. 由上述命题 (i),

$$q(\alpha\mathbf{x})=f(\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x})=\alpha^2f(\mathbf{x},\mathbf{x})=\alpha^2q(\mathbf{x}).\quad\square$$

定理 8.5 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, q 是 V 上的二次型. 则存在唯一的矩阵 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 使得对于任意的 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 使得

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证明. 设 f 是 q 的配极, A 是 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 且对任意的 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$, 我们有

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

于是, 由命题 8.3 可知,

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

存在性成立.

再设 $B \in \mathrm{SM}_n(F)$ 使得

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

令

$$\begin{aligned} g: V \times V &\longrightarrow F \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto (x_1, \ldots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

可直接验证 $g \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 因为 $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$, 所以 g 是 q 的配极(命题 8.3 (ii)) 且 B 是 g 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 因为 $f = g$, 所以 $A = B$. 唯一性成立. □

鉴于上述定理, 我们称矩阵 A 是二次型 q 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 进而, 配极 f 的秩称为 q 的秩, 记为 $\mathrm{rank}(q)$.

定理 8.6 设 V 的两组基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$, 且

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) P,$$

其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$. 设 V 上的二次型 q 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A, 在 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 下的矩阵为 B. 则 $B = P^t A P$.

证明. 设 f 是 q 的配极. 则 A 和 B 分别是 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 下的矩阵. 由第四周讲义第 20 页的内容可知，$B = P^t A P$. □

例 8.7 设 $p \in F[x_1, \ldots, x_n]$ 齐二次, 多项式函数 $p : F^n \to F$ 由公式 $p(\mathbf{v}) = p(v_1, \ldots, v_n)$ 给出, 其中 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)^t$ 是 F^n 中的任意元素. 则 p 是 F^n 上的二次型.

证明. 因为 p 是齐二次的, 所以

$$p = \sum_{1\le i\le j\le n} \alpha_{i,j} x_i x_j.$$

令 $\beta_{i,i} = \alpha_{i,i}$, $i = 1, 2 \ldots, n$, $\beta_{i,j} = \alpha_{i,j}/2$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 其中 $\{i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $i < j$. 而 $\beta_{j,i} = \beta_{i,j}$, 其中 $\{i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $i < j$. 则

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} x_i^2 + \sum_{i,j=1, i\ne j}^{n} \beta_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} x_i x_j \\ &= (x_1, \ldots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n,1} & \cdots & \beta_{n,n} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由 $\beta_{i,j}$ 的定义可知, A 是对称的. 令 f 是在标准基下矩阵是 A 的对称双线性型. 则

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (v_1, \ldots, v_n) A (v_1, \ldots, v_n)^t = p(\mathbf{v}).$$

于是, p 是 F^n 上的二次型. 它在标准基下的矩阵等于 A. 由由 $\beta_{i,j}$ 的定义可知,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \frac{\alpha_{1,2}}{2} & \cdots & \frac{\alpha_{1,n}}{2} \\ \frac{\alpha_{1,2}}{2} & \alpha_{2,2} & \cdots & \frac{\alpha_{2,n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_{1,n}}{2} & \frac{\alpha_{2,n}}{2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}.$$

定理 8.8 设 q 是 V 上的二次型. 则存在 V 的一组基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 使得 q 在该基下的矩阵是对角阵. 再设该对角阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 则对任意 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n \in V$,

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2. \tag{1}$$

证明. 设 q 的配极是 f. 由上一节定理 7.12 得出, f 的规范基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$. 于是 q 在该基下的矩阵是对角阵. 设该对角阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 则对任意的 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \cdots x_n\epsilon_n$, $\mathbf{y} = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_n\epsilon_n \in V$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_1 x_1 y_1 + \cdots + \lambda_n x_n y_n.$$

故

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2. \quad \square$$

基于上述定理, 我们称 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是 q 的一组规范基, (1) 是 q 的一个规范型.

由上一节推论 7.17 可知

推论 8.9 设 q 是 V 上的二次型且 $r = \mathrm{rank}(q)$. 则存在 q 的一组规范基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 使得对任意 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n \in V$, $q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$.

例 8.10 设 $p = x_2^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3$. 求 p 在 $\mathbb{R}^3$ 的标准基下的矩阵和秩.

解. 由上例可知,

$$A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

由定义得出 $\operatorname{rank}(p)=\operatorname{rank}(A)=2$.

例 8.11 设 $p\in F[x_1,\ldots,x_n]$, 非零齐二次. 证明*:* 如果 p 可以分解为两个一次多项式之积, 则 p 作为 F^n 上的二次型的秩不高于 2.

证明. 设 $p=fg$, 其中 f,g 是 $F[x_1,\ldots,x_n]$ 的齐一次多项式. 进而, 令

$$f=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n,\quad g=\beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n,$$

其中 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$ 不全为零, $\beta_1,\ldots,\beta_n\in F$ 也不全为零. 直接计算得 p 做为 F^n 上得二次型的矩阵是

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{\alpha_i\beta_j+\beta_i\alpha_j}{2}\right)_{n\times n}\\&=\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{B}+\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}_{C}.\end{aligned}$$

于是, $\operatorname{rank}(p)=\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B+C)\le\operatorname{rank}(B)+\operatorname{rank}(C)=2$ [1]. □

[1] $V_c(B+C)\subset V_c(B)+V_c(C)\implies\operatorname{rank}(B+C)\le\dim(V_c(B)+V_c(C))\le$

8.2 利用配方法化规范型

我们用一个具体的例子说明如何用配方法把一个二次型化为它的规范型.

例 8.12 设 $p = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$. 求 $\mathbb{R}^3$ 上二次型 p 的一组规范基和一个规范型.

解. 设

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} p &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 \\ &= 2(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 - 2y_3^2 \\ &= 2(y_1 + y_3)^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2. \end{aligned}$$

设

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

$\dim(V_c(B)) + \dim(V_c(C)) = \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(C).$

则 $p=2z_1^2-2z_2^2-2z_3^2$. 注意到

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P_1P_2^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

设 A 是 p 在标准基下的矩阵. 则

$$p=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (z_1,z_2,z_3)\left(P_1P_2^{-1}\right)^t A(P_1P_2^{-1})\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$=(z_1,z_2,z_3)\mathrm{diag}(2,-2,-2)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

于是, $A\sim_c \mathrm{diag}(2,-2,-2)$ 且 规范基是

$$P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的三个列向量.

命题 8.13 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{Q}(V)$ 是 V 上所有二次型的集合. 则 $\mathcal{Q}(V)$ 是 F 上的线性空间. 进而线性空间 $\mathcal{Q}(V)$, $\mathcal{L}_2^+(V)$ 和 $\mathrm{SM}_n(F)$ 是线性同构的.

证明. 设 $p, q \in \mathcal{Q}(V)$, 它们的配极分别是 f 和 g. 对任意的 $\alpha, \beta \in F$, 可直接验证 $\alpha p + \beta q$ 的配极是 $\alpha f + \beta g$. 于是, $\alpha p + \beta q \in \mathcal{Q}(V)$. 从而 $\mathcal{Q}(V)$ 是线性空间. 该结论还说明

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{Q}(V) & \longrightarrow & \mathcal{L}_2^+(V) \\ & p & \mapsto & f \end{array}$$

是线性映射. 设 $f = \phi(p)$ 是零对称双线性型. 根据命题 8.3 (i), $p = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. 于是, p 是零二次型. 由此可知 ϕ 是单射. 根据命题 8.3 (ii), ϕ 是满射. 我们证明了 ϕ 是线性同构.

设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基.

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{L}_2^+(V) & \longrightarrow & \mathrm{SM}_n(F) \\ & f & \mapsto & A_f = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n \times n}. \end{array}$$

再设 $g \in \mathcal{L}_2^+(V)$, $\alpha, \beta \in F$. 则

$$A_{\alpha f + \beta g} = ((\alpha f + \beta g)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)) = \alpha(f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)) + \beta(g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)) = \alpha A_f + \beta A_g.$$

于是, ψ 是线性的. 如果 $A_f = O$, 则 f 显然是零双线性型. 故 ψ 是单的. 设 $B \in \mathrm{SM}_n(F)$. 令

$$f : V \times V \longrightarrow F$$

由公式$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n) B (y_1, \ldots, y_n)^t$ 给出, 其中

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n \mathbf{e}_n, \ \mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + y_n \mathbf{e}_n$$

是 V 中两个任意的向量. 则 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 且 $A_f = B$. 由此可知 ψ 是满射. 我们证明了 ψ 是线性同构. 进而 $\psi \circ \phi$ 是从 $\mathcal{Q}(V)$ 到 $\mathrm{SM}_n(M)$ 的线性同构. $\square$

9　实二次型

在本节中, V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间.

9.1　惯性定理

定理 9.1 *(Sylvester)* 设 q 是 V 上的二次型. 则存在 q 的一组规范基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 使得在该基下 q 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

且 $k + \ell = \operatorname{rank}(q)$. 进而, 如果 q 在另一组规范基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

则 $k = s$ 和 $t = \ell$.

证明. 设 $r = \operatorname{rank}(q)$. 由上一节推论 7.17 及其证明可知, 存在 q 的一组基使得 q 在该基下的矩阵是

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0),$$

其中 $r = \operatorname{rank}(q)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 适当调整基底中元

素的顺序, 我们可进一步设

$$\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{R}^+,\quad \lambda_{k+1},\ldots,\lambda_{k+\ell}\in\mathbb{R}^-,\quad \text{且}\quad k+\ell=r.$$

令 P 为 n 阶可逆矩阵

$$\mathrm{diag}\left((\sqrt{\lambda_1})^{-1},\ldots,(\sqrt{\lambda_k})^{-1},(\sqrt{-\lambda_{k+1}})^{-1},\ldots,(\sqrt{-\lambda_{k+\ell}})^{-1},1,\ldots,1\right).$$

则

$$P^tAP=\begin{pmatrix}E_k & O & O\\ O & -E_\ell & O\\ O & O & O\end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 是两组 q 的规范基, 所对应的矩阵分别是

$$B=\begin{pmatrix}E_k & O & O\\ O & -E_\ell & O\\ O & O & O\end{pmatrix}\quad \text{和}\quad C=\begin{pmatrix}E_s & O & O\\ O & -E_t & O\\ O & O & O\end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n=y_1\epsilon_1+\cdots+y_n\epsilon$. 则

$$q(\mathbf{x})=x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_r^2=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_r^2.$$

假设 $k>s$. 则 $\ell<t$. 这是因为 $k+\ell=s+t=r$. 令 $U=\langle\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k\rangle$, $W=\langle\epsilon_{s+1},\ldots,\epsilon_n\rangle$. 则

$$\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U+W)\geq k+n-s-n=k-s>0.$$

于是由非零向量 $\mathbf{v} \in U \cap W$. 由 U 和 W 的生成元可知, 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 和 $\beta_{s+1}, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{e}_k = \beta_{s+1}\epsilon_{s+1} + \cdots + \beta_n \epsilon_n.$$

于是

$$q(\mathbf{v}) = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 > 0 \quad \text{且} \quad q(\mathbf{v}) = -\beta_{s+1}^2 - \cdots - \beta_r^2 \leq 0.$$

矛盾. □

利用上述定理中的记号, 我们有如下定义.

定义 9.2 称 k 是 q 的正惯性指数, ℓ 是 q 的负惯性指数, (k, ℓ) 是 q 的签名.

上述定理的矩阵版如下.

推论 9.3 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则存在 $k, \ell \in \mathbb{N}$ 使得

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

且 $k + \ell = \mathrm{rank}(q)$. 进而, 如果

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

则 $k = s$ 和 $t = \ell$.

利用上述推论中的记号, 我们由如下定义.

定义 9.4 称 k 是 A 的正惯性指数, ℓ 是 A 的负惯性指数, (k,ℓ) 是 A 的签名.

推论 9.5 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 $A \sim_c B$ 当且仅当 A 和 B 有共同的签名.

证明. 设 A 的签名是 (k,ℓ), B 的签名是 (s,t).

如果 $A \sim_c B$, 则由 $\sim_c$ 的传递律和对称律得出

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \Longrightarrow B \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

根据推论 9.3, (k,ℓ) 也是 B 的签名.

反之，设 $(k,\ell) = (s,t)$. 则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

因为 $\sim_c$ 是等价关系, 所以 $A \sim_c B$. $\square$

例 9.6 设

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \mathrm{tr}(A^2). \end{array}$$

证明 q 是二次型并求其签名.

证明. 设 $A=(a_{i,j})$. 则

$$q(A)=\operatorname{tr}(A^2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}a_{j,i}=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}^2+\sum_{1\le i<j\le n}2a_{i,j}a_{j,i}.$$

于是, q 是二次型. 考虑可逆坐标变换

$$z_{i,i}=a_{i,i},\ i=1,2,\ldots,n,\quad \text{和}\quad a_{i,j}=z_{i,j}+z_{j,i},\ a_{j,i}=z_{i,j}-z_{j,i},$$

其中 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\},i\neq j$. 则

$$q=\sum_{i=1}^{n}z_{i,i}^2+\sum_{1\le i<j\le n}2(z_{i,j}^2-z_{j,i}^2).$$

于是, q 的正惯性指数是

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

而负惯性指数是

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

从而 q 的签名为

$$\left(\frac{n(n+1)}{2},\ \frac{n(n-1)}{2}\right)$$