

第一章 空间与形式

9.2 (半) 正定二次型

定义 9.7 设 q 是 V 上的二次型.

- (i) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$, 则称 q 是半正定的 (*semi-positive definite*);
- (ii) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x}) > 0$, 则称 q 是正定的 (*positive definite*);
- (iii) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) \leq 0$, 则称 q 是半负定的 (*semi-negative definite*);
- (iv) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x}) < 0$, 则称 q 是负定的 (*negative definite*);
- (v) 如果 q 既不是半正定也不是半负定的, 则称 q 是不定的 (*indefinite*).

设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$, q_A 是 \mathbb{R}^n 上在标准基下矩阵为 A 的二次型. 如果 q_A 是半正定(正定的, 半负定的, 负定的, 不定的), 则称 A 是半正定(正定的, 半负定的, 负定的, 不定的).

命题 9.8 设 $\dim(V) = n$ 且 q 是 V 上的二次型. 它的签名是 (k, l) .

- (i) q 是半正定的当且仅当 $\ell = 0$;
- (ii) q 是正定的当且仅当 $k = n$;
- (iii) q 是半负定的当且仅当 $k = 0$;
- (iv) q 是负定的当且仅当 $\ell = n$;
- (v) q 是不定的当且仅当 $k > 0$ 且 $\ell > 0$.

证明. 设 q 在规范基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+\ell}^2,$$

其中 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ 是 V 中的任意向量.

(i) 若 $\ell = 0$, 则 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 \geq 0$. 即 q 半正定. 反之, 假设 $\ell > 0$. 令 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_{k+1}$. 则 $q(\mathbf{x}) = -1 < 0$. 矛盾. 故 $\ell = 0$.

(ii) 若 $k = n$, 则 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. 于是, 当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时, $q(\mathbf{x}) > 0$, 即 q 正定. 反之, 假设 $k < n$. 令 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$. 则 $q(\mathbf{e}_n) = 0$. 于是 q 不是正定的. 矛盾.

(iii) 与 (i) 类似.

(iv) 与 (ii) 类似.

(v) 排除 (i), (iii) 情形即可. \square

注解 9.9 半正定, 正定, 半负定, 负定和不定二次型分别有下列规范型

$$x_1^2 + \dots + x_k^2, \quad x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad -x_1^2 - \dots - x_\ell^2, \quad -x_1^2 - \dots - x_n^2,$$

和

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2,$$

在最后的规范型中 $k > 0, \ell > 0$.

类似地, 我们有

命题 9.10 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$. 它的签名是 (k, ℓ) .

- (i) A 是半正定的当且仅当 $\ell = 0$;
- (ii) A 是正定的当且仅当 $k = n$;
- (iii) A 是半负定的当且仅当 $k = 0$;
- (iv) A 是负定的当且仅当 $\ell = n$;
- (v) A 是不定的当且仅当 $k > 0$ 且 $\ell > 0$.

例 9.11 证明 $(a) \in M_1(\mathbb{R})$ 是正定的当且仅当 $a > 0$. 判定

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

是不是正定的.

证明. 矩阵 (a) 对应 \mathbb{R} 上的二次型 $q(x) = ax^2$. 而 q 正定当且仅当 $a > 0$.

利用行列相伴变换或 *Jacobi* 公式可得

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \implies A \text{ 的签名是 } (1, 1).$$

于是 A 是不定的.

例 9.12 设 $p, q \in \mathcal{Q}(V)$ 是半正定的. 证明 $p + q$ 也是半正定的; 若上述 p, q 中还有一个是正定的, 则 $p + q$ 也是正定的.

证明. 设 p, q 是半正定的. 则对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $p(\mathbf{x}) \geq 0$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$. 于是

$$(p + q)(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \geq 0.$$

再设 p 是正定的. 则对于任意的 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $p(\mathbf{x}) > 0$. 于是

$$(p + q)(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) > 0. \quad \square$$

类似地可证明下列结论.

注解 9.13 设 $A, B \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 是半正定的, 则 $A + B$ 也是半正定的; 进一步设 A, B 中还有一个是正定的, 则 $A + B$ 也是正定的.

设 $q \in \mathcal{Q}(V)$. 定义

$$C_q = \{\mathbf{v} \in V \mid q(\mathbf{v}) = 0\}.$$

称 C_q 为 q 确定的锥面 (cone).

例 9.14 设 $q \in Q(V)$. 证明 C_q 是 V 的子空间当且仅当 q 是半正定或半负定的.

证明. 设 q 的签名是 (k, ℓ) .

设 C_q 是 V 中的子空间. 如果 $k > 0$ 且 $\ell > 0$. 根据惯性定理 q 在 V 的某组基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 + \dots + x_{k+\ell}^2$, 其中 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_k\mathbf{e}_k + x_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. 于是 $q(\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1}) = 1 - 1 = 0$ 且 $q(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+1}) = 0$. 由此可知

$$\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+1} \in C_q \implies 2\mathbf{e}_k \in C_q \implies q(2\mathbf{e}_k) = 0 \implies 4 = 0.$$

矛盾. 于是 $k = 0$ 或 $\ell = 0$. 即 q 是半负定或半正定的.

反之, 不妨设 q 是半正定的. 根据惯性定理 q 在 V 的某组基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2.$$

设 $U = \langle \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$. 则 $U \subset C_q$. 设 $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \dots + v_n\mathbf{e}_n \in C_q$. 则

$$q(\mathbf{v}) = v_1^2 + \dots + v_k^2 = 0.$$

因为 $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}$, 所以 $v_1 = \dots = v_k = 0$. 于是

$$\mathbf{v} = v_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \dots + v_n\mathbf{e}_n \in U,$$

即 $C_q \subset U$. 综上所述, $U = C_q$. \square

9.3 (半) 正定矩阵的等价条件

实数域的一个基本性质是：设 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. 则

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0; \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0.$$

这个性质的矩阵版如下：设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}^t \mathbf{x} \geq 0; \quad \mathbf{x}^t \mathbf{x} = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

引理 9.15 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则 $A^t A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$, 半正定且 $\text{rank}(A^t A) = \text{rank}(A)$.

证明. 计算 $(A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A$ 得出 $A^t A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$.

设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. 则

$$\mathbf{x}^t (A^t A) \mathbf{x} = \mathbf{y}^t \mathbf{y} \geq 0.$$

故 $A^t A$ 半正定.

设 U, V 是分别是以 A 和 $A^t A$ 为系数的齐次线性方程组的解空间. 则 $U \subset V$. 反之, 设 $\mathbf{x} \in V$. 则

$$A^t A \mathbf{x} = \mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^n.$$

于是, $\mathbf{y}^t \mathbf{y} = 0$. 由此得出 $\mathbf{y} = \mathbf{0}_m \in \mathbb{R}^m$, 即 $\mathbf{x} \in U$. 由此得出 $U = V$. 特别地, $\dim(U) = \dim(V)$. 由方程组版的对偶定理, $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^t A)$. \square

定理 9.16 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$. 则

(i) A 半正定当且仅当存在 $B \in \text{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = B^t B$.

(ii) A 正定当且仅当存在 $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = B^t B$.

证明. (i) 设 A 半正定. 则由矩阵版的惯性定理存在 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t A P = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \text{rank}(A)$, 也是 A 的正惯性指数. 于是

$$A = (P^{-1})^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = (P^{-1})^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}}_B P^{-1} = B^t B.$$

反之, 根据引理 9.15, $A = B^t B$ 是半正定的.

(ii) 设 A 正定. 则由矩阵版的惯性定理存在 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^t A P = E_n$. 于是, $A = (P^{-1})^t P^{-1}$. 反之, 根据引理 9.15, $A = B^t B$ 是半正定的. 因为 B 可逆, 所以 A 满秩. 于是, A 的正惯性指数等于 n . \square

例 9.17 设 A 是正定矩阵. 证明 $\det(A) > 0$ 且 A^{-1} 也正定.

证明. 由上述定理 (ii), $A = P^t P$, 其中 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) = \det(P)^2 > 0$, 且

$$A^{-1} = (P^t P)^{-1} = P^{-1} (P^t)^{-1} = P^{-1} (P^{-1})^t.$$

再由上述定理 (ii), A^{-1} 正定. \square

定理 9.18 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$. 设 Δ_k 是 A 的 k 阶顺序主子式, $k = 1, 2, \dots, n$. 则下列命题等价.

(i) A 正定;

(ii) A 的任何 k 阶主子式都大于零;

(iii) $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

证明. (i) \implies (ii) 设 B 是由 A 中第 i_1, \dots, i_k 行和 i_1, \dots, i_k 列构成的子矩阵. 其中 $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. 令 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 对任意 $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, 第 j 个坐标等于零, 第 i_ℓ 个坐标等于 x_{i_ℓ} , $\ell = 1, 2, \dots, k$. 再令 $\mathbf{y} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})^t$. 假设 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}_k$. 则 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$. 于是

$$0 < \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \mathbf{y}^t B \mathbf{y}.$$

由 \mathbf{y} 的任意性可知, B 正定. 根据上例, $\det(B) > 0$.

(ii) \implies (iii) 显然.

(iii) \implies (i) 由 Jacobi 公式,

$$A \sim_c \text{diag} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \right),$$

其中 $\Delta_0 = 1$. 于是 A 合同于一个对角矩阵, 其对角线上的元素都是正实数. 于是 A 的正惯性指数等于 n . \square

例 9.19 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

问 λ 为何值时 A 是正定的, A 是负定的?

解. A 的三个顺序主子式分别是

$$\Delta_1 = \lambda, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1, \quad \Delta_3 = \det(A) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

A 正定当且仅当 $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ 且 $\Delta_3 > 0$. 即 $\lambda > 1$.

A 负定当且仅当 $-A$ 正定. 而 $-A$ 的三个主子式是

$$\Omega_1 = -\lambda, \quad \Omega_2 = \lambda^2 - 1, \quad \Omega_3 = \det(A) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

A 负定当且仅当 $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$ 且 $\Omega_3 > 0$. 即 $\lambda < -2$.

例 9.20 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明 $\det(A)$ 不大于 A 的对角线上元素之积.

证明. 设 $A = (a_{i,j})$. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (a_{1,1})$. 于是 $\det(A) = a_{1,1}$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且 $n - 1$ 时结论成立. 把 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

由定理 9.18 (i) \implies (ii) 的证明可知, A_{n-1} 正定. 于是 $\det(A_{n-1}) \leq a_{1,1} \cdots a_{n-1,n-1}$. 令

$$P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\mathbf{v} \\ O_{1 \times (n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$P^t A P = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O_{(n-1) \times 1} \\ O_{1 \times (n-1)} & a_{n,n} - \underbrace{\mathbf{v}^t A_{n-1}^{-1} \mathbf{v}}_{\alpha} \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(P) = 1$, 所以上式两边取行列式得

$$\det(A) = \det(A_{n-1})(a_{n,n} - \alpha).$$

因为 A_{n-1} 正定, 所以 A_{n-1}^{-1} 正定 (见例 9.17). 于是 $\alpha \geq 0$. 由上式和归纳假设得

$$\det(A) \leq a_{1,1} \cdots a_{n-1,n-1} a_{n,n}. \quad \square$$

例 9.21 (Hadamard 不等式) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 证明:

$$|\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2} \quad \text{和} \quad |\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i}^2}.$$

证明. 不妨设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$. 令 $M = A^t A$. 由定理 9.16 (ii) 可知 M 正定. 设 $M = (m_{i,j})$. 则由上例得到

$$\det(M) \leq m_{1,1} \cdots m_{n,n}.$$

注意到

$$m_{i,i} = \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

所以

$$\det(A)^2 = \det(M) \leq \prod_{i=1}^n m_{i,i} = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

由此证明了第二个不等式. 令 $M = AA^t$. 我们可以证明第一个不等式. \square

10 二次曲线和曲面的仿射分类

10.1 仿射变换

在本小节中, F 是任意的域, V 是域 F 上的线性空间.

定义 10.1 设 $\phi: V \rightarrow V$ 是线性(自)同构, $\mathbf{v} \in V$ 是一个固定的向量. 映射

$$\begin{aligned} \rho: V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\longmapsto \phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \end{aligned}$$

称为 V 上一个由 ϕ 和 \mathbf{v} 定义的仿射变换 (*affine transformation*), 其中 \mathbf{v} 称为 ρ 的平移向量.

当 ϕ 是恒同映射是, ρ 称为平移变换 (*translation*).

命题 10.2 (i) 设 ρ_1, ρ_2 是 V 上两个仿射变换. 则 $\rho_2 \circ \rho_1$ 也是仿射变换.

(ii) 仿射变换可逆, 且其逆也是仿射变换.

证明. (i) 设 ρ_i 由线性同构 ϕ_i 和平移向量 \mathbf{v}_i 定义, $i = 1, 2$. 再设 $\mathbf{x} \in V$. 则

$$\rho_2 \circ \rho_1(\mathbf{x}) = \rho_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) = \phi_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = \phi_2 \circ \phi_1(\mathbf{x}) + \phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2.$$

于是 $\rho_2 \circ \rho_1$ 是由线性同构 $\phi_2 \circ \phi_1$ 和平移向量 $\phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2$ 定义的仿射变换.

(ii) 设 ρ 是由线性同构 ϕ 和平移向量 \mathbf{v} 定义的仿射变换. 根据 (i) 的证明, 我们令 σ 是由 ϕ^{-1} 和 $-\phi^{-1}(\mathbf{v})$ 定义的仿射变换. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$,

$$\sigma \circ \rho(\mathbf{x}) = \sigma(\phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = \phi^{-1}(\phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) - \phi^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{x} + \phi^{-1}(\mathbf{v}) - \phi^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{x}.$$

类似地,

$$\rho \circ \sigma(\mathbf{x}) = \rho(\phi^{-1}(\mathbf{x}) - \phi^{-1}(\mathbf{v})) = \phi(\phi^{-1}(\mathbf{x}) - \phi^{-1}(\mathbf{v})) + \mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{x}.$$

于是, $\rho^{-1} = \sigma$. \square

注解 10.3 上述命题说明 V 上的所有仿射变换关于 \circ 构成群.

例 10.4 在这个例子中我们研究 \mathbb{R}^n 上的仿射变换. 在标准基下 \mathbb{R}^n 中每个向量是由 n 个坐标的列向量, 每个线性同构对应一个唯一的可逆矩阵. 于是仿射变换 ρ 可以具体的表示为

$$\rho: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

其中 $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, v_1, \dots, v_n 是固定的实数.

考虑函数 $f(x_1, \dots, x_n): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. 在微积分中我们经常做变量替换把 f 变为另一种形式. 变量替换是一个从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^n 的可逆映射

$$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

仿射变换是一种特殊的变量替换. 利用变量替换化简函数

可以用下列交换图直观地表示

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & \mathbb{R}, \end{array}$$

其中 $g = f \circ T(x_1, \dots, x_n) = f(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n))$.

我们对函数 g 的知识可以通过同构 $f = g \circ T^{-1}$ 转换到成关于 f 的知识. 当然我们可能需要经过多次变换替换才能达到目的. 此时交换图表示为

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_1 \circ \dots \circ T_k} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & \mathbb{R}. \end{array}$$

引理 10.5 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 的次数等于 2, 其齐 2 次部分记为 h_2 . 把 p 看成从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R} 的函数, h_2 看成相应的二次型. 则存在 \mathbb{R}^n 上的仿射变换 ρ 使得

$$p \circ \rho: \quad \mathbb{R}^n \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{aligned} & x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 \\ & -\lambda x_{k+l+1} - \mu, \end{aligned}$$

其中 (k, l) 是 h_2 的签名, $\lambda \in \{0, 1\}$ 且 $\mu \in \mathbb{R}$.

证明. 设 $p = h_2 + h_1 + h_0$ 是 p 的加法分解. 则

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^t + h_1(\mathbf{x}) + h_0,$$

其中 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$. 由惯性定理(矩阵版)可知, 存在 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t A P = \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \quad (1)$$

. 设 $\rho_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 由公式 $\rho_1(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ 给出. 则

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^t P^t A P \mathbf{x} + h_1(P\mathbf{x}) + h_0 \\ &\stackrel{(1)}{=} x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 \\ &\quad + 2\alpha_1 x_1 + \cdots + 2\alpha_n x_n + h_0, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. 通过配方得

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1(\mathbf{x}) &= (x_1 + \alpha_1)^2 + \cdots + (x_k + \alpha_k)^2 \\ &\quad - (x_{k+1} - \alpha_{k+1})^2 - \cdots - (x_{k+l} - \alpha_{k+l})^2 \\ &\quad + 2\alpha_{k+l+1} x_{k+l+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n + \xi, \end{aligned}$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}$. 考虑平移变换

$$\rho_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+l} \\ x_{k+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ x_k - \alpha_k \\ x_{k+1} + \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+l} + \alpha_{k+l} \\ x_{k+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

则

$$p \circ \rho_1 \circ \rho_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 \\ + 2\alpha_{k+l+1}x_{k+l+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n + \xi.$$

情形 1. 当 $2\alpha_{k+l+1}x_{k+l+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n = 0$ 时, 令 $\lambda = 0$ 和 $\mu = -\xi$ 即可.

情形 2. 当 $2\alpha_{k+l+1}x_{k+l+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n \neq 0$ 时, 存在 $j \in \{k+l+1, k+l+2, \dots, n\}$ 使得 $\alpha_j \neq 0$. 设 $m = n - (k+l)$. 考虑一个 m 阶可逆方阵 B , 其中 B 的第一行是 $(-2\alpha_{k+l+1}, \dots, -2\alpha_n)$, 其它行中的元素只有一个是 1 和其它都是 0, 特别地, 第 j 个元素一定是零. 这样的可逆矩阵

显然存在. 于是

$$C = \begin{pmatrix} E_{k+l} & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

是 n 阶可逆矩阵. 则 $C\mathbf{x}$ 中的第 $k+l+1$ 个坐标等于 $-2\alpha_{k+l+1}x_{k+l+1} - \cdots - 2\alpha_n x_n$. 令 $\rho_3: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 由公式 $\rho_3(\mathbf{x}) = C^{-1}\mathbf{x}$ 给出. 则

$$p \circ \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 - x_{k+l+1} + \xi. \quad (2)$$

令 $\lambda = 1$ 和 $\mu = -\xi$ 即可. (上式的一个计算验证过程见注释 10.6). \square

注解 10.6 等式 (2) 的具体验证过程如下. 设 $\mathbf{y} = \rho_3(\mathbf{x})$, 其中 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$. 则

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1 \circ \rho_2(\mathbf{y}) &= y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+l}^2 \\ &\quad + 2\alpha_{k+l+1}y_{k+l+1} + \cdots + 2\alpha_n y_n + \xi. \end{aligned}$$

注意到由 ρ_3 的定义可得:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k+l} \end{pmatrix} = E_{k+l} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k+l} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} y_{k+l+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}
p \circ \rho_1 \circ \rho_2(\mathbf{x}) &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 \\
&\quad + (2\alpha_{k+l+1}, \dots, 2\alpha_n) B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\
&= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 \\
&\quad - \vec{B}_1 B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\
&= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 \\
&\quad - \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{n-k-l-1} \begin{pmatrix} x_{k+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\
&= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 - x_{k+l+1} + \xi.
\end{aligned}$$

验证完毕.

定理 10.7¹ 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 的次数等于 2, 其齐 2 次部分记为 h_2 . 把 p 看成从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R} 的函数, h_2 看成相应的二次型. 设 $r = \text{rank}(h_2)$ 和 k 是 h_2 的正惯性指数. 则存在

¹见柯斯特利金第二卷191页的推论.

\mathbb{R}^n 上的仿射变换 ρ 使得

$$p \circ \rho: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 - \mu,$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$; 或存在 \mathbb{R}^n 上的仿射变换 ρ 使得

$$p \circ \rho: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 - x_{r+1}$$

且 $r < n$.

证明. 注意到 h_2 的负惯性指数等于 $r - k$. 当引理 10.5 中 $\lambda = 0$ 时, 我们得到第一个函数. 否则 $\lambda = 1$. 我们考虑平移 $x_i \mapsto x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{r + 1\}, x_{r+1} \mapsto x_{r+1} - \mu$ 即可. \square

设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. 定义

$$S_p = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0\}$$

称为由 p 定义的超曲面. 当 $\deg(p) = 2$ 时, S_p 称为二次超

曲面, \mathbb{R}^2 中的二次超曲面称为二次曲线, \mathbb{R}^3 中的二次超曲面称为二次曲面.

设 $\deg(p) = 2$, p 的齐二次部分等于 q , q 的秩等于 r , 签名是 (k, ℓ) . 则 $r > 0$ 且 $k + \ell = r$.

首先考虑二次曲线 ($n = 2$).

情形 C_1 . $r = 2$.

(1a) $(k, \ell) = (2, 0)$. $p = x_1^2 + x_2^2 - \mu$. 如果 $\mu < 0$, 则 $S_p = \emptyset$; 如果 $\mu = 0$, 则 $S_p = \{\mathbf{0}_2\}$; 如果 $\mu > 0$, 则 S_p 是(椭圆).

(1b) $(k, \ell) = (0, 2)$. 与 (1a) 类似.

(1c) $k = 1, \ell = 1$. $p = x_1^2 - x_2^2 - \mu$. 如果 $\mu \neq 0$, 则 S_p 是双曲线. 如果 $\mu = 0$, 则 S_p 是两条相交于一点的直线.

情形 C_2 . $r = 1$.

(2a) $k = 1, \ell = 0$. 如果 $p = x_1^2 - x_2$, 则 S_p 是抛物线. 如果 $p = x_1^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ ($\mu < 0$); S_p 是两条重合的直线($\mu = 0$); S_p 是两条平行直线($\mu > 0$).

(2b) $k = 0, \ell = 1$. 与 (2a) 类似.

再考虑二次曲面 ($n = 3$).

情形 S_1 . $r = 3$.

(1a) $(k, \ell) = (3, 0)$. $p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \mu$. 如果 $\mu < 0$, 则 $S_p = \emptyset$; 如果 $\mu = 0$, 则 $S_p = \{\mathbf{0}_3\}$; 如果 $\mu > 0$, 则 S_p 是(椭)球面.

(1b) $(k, \ell) = (0, 3)$. 与 (1a) 类似.

(1c) $(k, \ell) = (2, 1)$. $p = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \mu$. 如果 $\mu < 0$, 则 S_p 是双叶双曲面. 如果 $\mu = 0$, 则 S_p 是(椭)圆锥面. 如果 $\mu > 0$, 则 S_p 是单叶双曲面.

情形 S_2 . $r = 2$.

(2a) $(k, \ell) = (2, 0)$. 如果 $p = x_1^2 + x_2^2 - x_3$, 则 S_p 是椭圆抛物面; 如果 $p = x_1^2 + x_2^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ ($\mu < 0$); $S_p = \{\mathbf{0}_3\}$ ($\mu = 0$); S_p (椭)圆柱面 ($\mu > 0$).

(2b) $(k, \ell) = (0, 2)$. 与 (2a) 类似.

(2c) $(k, \ell) = (1, 1)$. 如果 $p = x_1^2 - x_2^2 - x_3$, 则 S_p 是双曲抛物面. 如果 $p = x_1^2 - x_2^2 - \mu$, 则 S_p 是双曲柱面($\mu \neq 0$); S_p 是两张相交于一条直线的平面($\mu = 0$).

情形 S_3 . $r = 1$.

(3a) $(k, \ell) = (1, 0)$. 如果 $p = x_1^2 - x_2$, 则 S_p 是抛物柱面; 如果 $p = x_1^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ ($\mu < 0$); S_p 是两张重合的平面 ($\mu = 0$); S_p 是两张平行的平面 ($\mu > 0$).

(3b) $(k, \ell) = (0, 1)$. 与 (3a) 类似.