第一章　空间与形式

11　斜对称双线性型

在本节中 F 是特征不等于 2 的域, V 是 F 线性空间.

引理 11.1 设 $f \in \mathcal{L}_2(V)$. 则 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$ 当且仅当对任意 $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

证明. 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$. 因为 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, 所以 $2f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 于是 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. 反之, 设对任意 $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$.则任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$\begin{aligned} 0 &= f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

由此得出 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. □

引理 11.2 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, 则 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 线性无关.

证明. 因为 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, 所以 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 都不是零向量. 假设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 线性相关. 则存在 $\alpha \in F \setminus \{\mathbf{0}\}$ 使得 $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$. 由引理 11.1 可知, $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. 矛盾. □

定义 11.3 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. 则 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 称为 f 的辛平面 *(simpletic plane)*.

引理 11.4 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, W 是 f 的辛平面, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基. 则 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$.

证明. 设 $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ 使得 $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0$. 因为 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基, 所以存在 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F$ 使得

$$\mathbf{v}_1 = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 \quad \text{和} \mathbf{v}_2 = \beta_1 \mathbf{w}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2.$$

于是

$$0 \neq f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = f(\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2, \beta_1 \mathbf{w}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2).$$

由此可知 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. □

引理 11.5 设 V 是 F 上的 n 维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, W 是 f 的辛平面. 则存在 V 中子空间 $\widetilde{W}$ 满足对任意的 $\mathbf{x} \in W$, $\mathbf{y} \in \widetilde{W}$ 使得 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, 且 $V = W \oplus \widetilde{W}$.

证明. 设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基,

$$U_i = \{\mathbf{y} \in V \mid f(\mathbf{w}_i, \mathbf{y}) = 0\},$$

$i = 1, 2$. 由 f 的双线性可知, U_1, U_2 都是子空间. 根据引理 11.4, $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. 于是 $\mathbf{w}_2 \notin U_1$. 由 f 的斜对称性可知 $f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) \neq 0$. 于是 $\mathbf{w}_1 \notin U_2$. 即

$$\ell_1 = f(\mathbf{w}_1, \mathbf{y}) \quad \text{和} \quad \ell_2 = f(\mathbf{w}_2, \mathbf{y})$$

都是关于 $\mathbf{y}$ 的非零线性函数. 于是 $\dim(\mathrm{im}(\ell_i)) = 1$. 进而 $U_i = \ker(\ell_i)$ 的维数是 $n-1$, $i = 1, 2$.

令 $\widetilde{W} = U_1 \cap U_2$. 则对于任意 $\mathbf{y} \in \widetilde{W}$,

$$f(\mathbf{w}_1, \mathbf{y}) = f(\mathbf{w}_2, \mathbf{y}) = 0.$$

由 f 的双线性可知, 对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$,

$$f(\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2, \mathbf{y}) = 0.$$

即对于任意 $\mathbf{x} \in W$, $\mathbf{y} \in \widetilde{W}$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

根据维数公式, 我们有

$$\dim(\widetilde{W}) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2) \geq n-1+n-1-n = n-2.$$

若 $\mathbf{w} \in W \cap \widetilde{W}$, 则存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ 使得 $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2$. 又因为 $\mathbf{w} \in \widetilde{W}$, 所以

$$f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}) = 0 \implies \alpha_1 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0.$$

由引理 11.1, $\alpha_1 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) = 0$. 再由引理 11.4, $\alpha_2 = 0$. 类似地, 从 $f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}) = 0$ 和 $f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) \neq 0$ 可推出 $\alpha_1 = 0$. 于是 $\mathbf{w} = 0$. 即 $W + \widetilde{W}$ 是直和. 由此可得.

$$\dim(W \oplus \widetilde{W}) = \dim(W) + \dim(\widetilde{W}) \geq 2 + n - 2 = n.$$

从而 $V = W \oplus \widetilde{W}$. $\square$

定理 11.6 设 V 是 F 上的有限维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$. 则存在 f 的辛平面 $W_1, \ldots, W_k$ 和子空间 U 满足

(i) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$;

(ii) $f|_{U\times U}$ 上是零双线性型;

(iii) 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\mathbf{x} \in W_1 \oplus \cdots \oplus W_i$, $\mathbf{y} \in W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$, 我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

证明. 如果 f 是零双线性型, 则取 $k = 0$ 和 $U = V$ 即可. 我们假设 f 非零且 $n = \dim(V)$. 则 $n > 1$.

对 n 归纳. 设 $n = 2$. 因为 f 非零, 所以存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$. 由引理 11.2, 我们有 $V = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 是 f 的辛平面. 此时取 $W_1 = V$, $k = 1$ 和 $U = \{\mathbf{0}\}$ 即可.

设 $n > 1$ 且结论对维数小于 n 的线性空间成立. 因为 f 非零, 所以存在 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$ 使得 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. 令

$$W_1 = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle.$$

根据引理 11.5, 存在 V 的子空间 $\widetilde{W_1}$ 使得对任意 $\mathbf{x} \in W_1$, $\mathbf{y} \in \widetilde{W_1}$ 我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 且 $V = W_1 \oplus \widetilde{W_1}$. 考虑 $\widetilde{W_1}$ 上的斜对称双线性型 $f_1 = f|_{\widetilde{W_1}\times\widetilde{W_1}}$. 如果 f_1 是零映射, 则取 $k = 1$ 和 $U = \widetilde{W_1}$ 即可. 否则，由归纳假设存在 f_1 的辛平面 $W_2, \ldots, W_k$ 和 $\widetilde{W_1}$ 的子空间 U 使得

(i) $\widetilde{W_1} = W_2 \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$;

(ii) $f_1|_{U\times U}$ 上是零双线性型;

(iii) 对任意 $j \in \{2,3,\dots,k\}$, $\mathbf{x} \in W_2 \oplus \cdots \oplus W_j$, $\mathbf{y} \in W_{j+1} \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$, 我们有 $f_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$.

则 $V = W_1 \oplus \widetilde{W}_1 = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$. 进而 $f|_{U\times U} = f_1|_{U\times U}$ 上是零双线性型. 设 $i \in \{1,2,\dots,k\}$, $\mathbf{x} \in W_1 \oplus \cdots \oplus W_i$, $\mathbf{y} \in W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$. 则 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, 其中 $\mathbf{x}_1 \in W_1$, $\mathbf{x}_2 \in W_2 \oplus \cdots \oplus W_i$. 直接计算得

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}) + f(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) = 0 + 0 = 0.$$

于是, $W_1, W_2, \dots, W_k, U$ 即为所求. $\square$.

定理 11.7 设 V 是 F 上 n 维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$. 则存在 V 的一组基 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 使得 f 在该基下的矩阵等于

$$M = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} S_2 & & \\ & \ddots & \\ & & S_2 \end{matrix}\right\}k & \\ & O \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ 2k = \operatorname{rank}(f).$$

证明. 根据定理 11.6, 存在 f 的辛平面 $W_1,\dots,W_k$ 和子空间 U 满足定理 11.6 中的三个性质. 设 $\mathbf{w}_{2i-1}, \mathbf{w}_{2i}$ 是 W_i 的一组基. 根据引理 11.4, $\alpha_i = f(\mathbf{w}_{2i-1},\mathbf{w}_{2i}) \neq 0$. 令 $\mathbf{e}_{2i-1} = \alpha_i^{-1}\mathbf{w}_{2i-1}$, $\mathbf{e}_{2i} = \mathbf{w}_{2i}$. 则 $f(\mathbf{e}_{2i-1},\mathbf{e}_{2i}) = 1$, $i = 1,2,\dots,k$. 由直和分解 $V = W_1 \oplus \cdots W_k \oplus U$ 可知,

$$\dim(U) = n - 2k.$$

再设 $\mathbf{e}_{2k+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 U 的一组基. 上述直和分解保证 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_{2k-1},\mathbf{e}_{2k},\mathbf{e}_{2k+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 由定理 11.6 中的第二和第三个性质可知, f 在这组基下的矩阵为 M. □

推论 11.8 设 $A\in\mathrm{SSM}_n(F)$. 则 A 的秩是偶数. 设

$$\mathrm{rank}(A)=2k.$$

则

$$A\sim_c\begin{pmatrix}\left.\begin{matrix}S_2 & & \\ & \ddots & \\ & & S_2\end{matrix}\right\}k & \\ & O\end{pmatrix},\quad \text{其中 } S_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

证明. 设

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

是 F^n 上的双线性型. 因为 A 斜对称, 所以 f 斜对称. 根据定理 11.7, A 与上述矩阵合同. 于是 $\mathrm{rank}(A)=2k$. □

例 11.9 证明域 F 上奇数阶斜对称方阵的行列式等于零; 偶数阶斜对称方阵的行列式等于 F 中某个元素的平方.

证明. 设 $A\in\mathrm{SSM}_n(F)$. 如果 n 是奇数, 则推论 *11.9* 指出 A 不满秩. 于是 $\det(A)=0$. 设 n 是偶数. 如果 A 不满秩,

则结论显然成立. 否则存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$A = P^t \begin{pmatrix} S_2 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & S_2 & \\ & & & & S_2 \end{pmatrix} P, \quad \text{其中 } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $\det(A) = \det(P^t)\det(S_2)^{\frac{n}{2}}\det(P) = \det(P)^2$. □

例 11.10 设 A 是整数环上偶数阶斜对称满秩方阵. 证明 $\det(A)$ 是某个正整数的平方.

证明. 注意到 $A \in \mathrm{SSM}_n(\mathbb{Q})$. 由上例可知 $\det(A) = a^2$, 其中 a 是某个正有理数. 但 $\det(A) \in \mathbb{Z}^+$. 如果 a 不是整数, 则 a^2 也不是. 这样等式 $\det(A) = a^2$ 不可能成立. 于是 $a \in \mathbb{Z}^+$.

在上例假设条件下 $\sqrt{\det(A)}$ 称为 A 的 *Pfaffian*.

12 直和与投影(补充内容)

本节中 V 是 F 上的线性空间, 对 F 的特征和 V 的维数没有任何限制. 设 $U_1, \ldots, U_k$ 是 V 的子空间且

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k. \tag{1}$$

则由直和的定义可知, 对于任意 $\mathbf{x}\in V$ 存在唯一的 $\mathbf{x}_1\in U_1,\ldots,\mathbf{x}_k\in U_k$ 使得

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_k. \tag{2}$$

我们称 $\mathbf{x}_i$ 是 $\mathbf{x}$ 关于 (1) 在 U_i 上的投影. 定义

$$\begin{aligned}\pi_i:\ V &\longrightarrow V\\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x}_i,\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x}_i$ 由 (2) 给出, $i=1,2,\ldots,k$. 由 $\mathbf{x}$ 关于 (1) 在 U_i 上的投影的唯一性, π_i 是良定义的. 我们称 π_i 是关于 (1) 的第 i 个投影. 于是 (2) 可以写成

$$\mathbf{x}=\pi_1(\mathbf{x})+\cdots+\pi_k(\mathbf{x}). \tag{3}$$

引理 12.1 设 π_i 是关于 (1) 的第 i 个投影. 则

(i) π_i 是线性映射,

(ii) $\ker(\pi_i)=U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_k$,

(iii) $\mathrm{im}(\pi_i)=U_i$,

(iv) 对于任意 $\mathbf{x}\in U_i$, $\pi_i(\mathbf{x})=\mathbf{x}$.

证明. (i) 设 $\alpha,\beta\in F$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. 由 (3) 得

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^k\pi(\mathbf{x}_i)\quad 和 \quad \mathbf{y}=\sum_{i=1}^k\pi_i(\mathbf{y}).$$

于是
$$\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{k}\alpha\pi_i(\mathbf{x})+\beta\pi_i(\mathbf{y}).$$
因为 $\alpha\pi_i(\mathbf{x})+\beta\pi_i(\mathbf{y})\in U_i$, 所以它是 $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}$ 关于 (1) 在 U_i 上的投影. 即
$$\alpha\pi_i(\mathbf{x})+\beta\pi_i(\mathbf{y})=\pi_i(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}).$$
于是 π_i 是线性的.

(ii) 如果 $\pi_i(\mathbf{x})=0$, 则由 (3) 可知,
$$\mathbf{x}\in U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_k.$$
反之, 设
$$\mathbf{x}\in U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_k.$$
则
$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_{i-1}+\mathbf{0}+\mathbf{x}_{i+1}+\cdots\mathbf{x}_k,$$
其中 $\mathbf{x}_j\in U_j$, $j\in\{1,2,\ldots,k\}\setminus\{i\}$. 由直和的定义可知 $\pi_i(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 这样就得出了
$$\ker(\pi_i)=U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_k.$$
(iii) 和 (iv) 设 $\mathbf{x}\in U_i$. 则 (2) 变为
$$\mathbf{x}=\underbrace{\mathbf{0}+\cdot+\mathbf{0}}_{i-1}+\mathbf{x}+\underbrace{\mathbf{0}+\cdots+\mathbf{0}}_{k-i}.$$
于是 $\pi_i(\mathbf{x})=\mathbf{x}$. 特别地 $\mathrm{im}(\pi_i)=U_i$. □

命题 12.2 设 π_i 是关于 (1) 的第 i 个投影, $i = 1, 2, \ldots, k$. 则

(i) 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 且 $i \neq j$, $\pi_j \circ \pi_i$ 是零映射.

(ii) 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\pi_i \circ \pi_i = \pi_i$.

(iii) $\pi_1 + \cdots + \pi_k$ 是恒同映射.

证明. 设 $\mathbf{x} \in V$.

(i) 注意到 $\pi_i(\mathbf{x}) \in U_i$. 这是因为引理 12.1 中有 $U_i = \mathrm{im}(\pi_i)$. 因为 $j \neq i$, 所以 $U_i \subset \ker(\pi_j)$ (引理 12.1). 于是 $\pi_j \circ \pi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

(ii) 由 (i) 的证明可知 $\pi_i(\mathbf{x}) \in U_i$. 再根据引理 12.1. 我们由 $\pi_i \circ \pi_i(\mathbf{x}) = \pi_i(\mathbf{x})$.

(iii) 我们计算得

$$(\pi_1 + \cdots + \pi_k)(\mathbf{x}) = \pi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \pi_k(\mathbf{x}) \stackrel{(3)}{=} \mathbf{x}. \quad \square$$

定义 12.3 设 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \mathrm{Hom}(V, V)$. 如果

(i) *(正交性)* 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 且 $i \neq j$, $\sigma_j \circ \sigma_i$ 是零映射.

(ii) *(等方性)* 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\sigma_i \circ \sigma_i = \sigma_i$.

(iii) *(完全性)* $\sigma_1 + \cdots + \sigma_k$ 是恒同映射.

则称 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ 是一个完全正交等方组.

命题 12.4 设 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ 是一个完全正交等方组. 则

$$V = \mathrm{im}(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{im}(\sigma_k),$$

且 σ_i 是关于上述直和的第 i 个投影, $i = 1, 2, \ldots, k$.

证明. 设 $\mathbf{x} \in V$. 由完全性

$$\mathbf{x} = (\sigma_1 + \cdots + \sigma_k)(\mathbf{x}) = \sigma_1(\mathbf{x}) + \cdots + \sigma_k(\mathbf{x}) \in \mathrm{im}(\sigma_1) + \cdots + \mathrm{im}(\sigma_k). \tag{4}$$

于是 $V = \mathrm{im}(\sigma_1) + \cdots + \mathrm{im}(\sigma_k)$.

设 $\mathbf{0} = \mathbf{x}_1 + \cdots \mathbf{x}_n$, 其中 $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{im}(\sigma_1), \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathrm{im}(\sigma_k)$. 则对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, 存在 $\mathbf{y}_i \in V$ 使得 $\sigma_i(\mathbf{y}_i) = x_i$. 由此得出

$$\mathbf{0} = \sigma_1(\mathbf{y}_1) + \cdots + \sigma_k(\mathbf{y}_k).$$

于是, 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$\mathbf{0} = \sigma_i(\mathbf{0}) = \sigma_i \circ \sigma_1(\mathbf{y}_1) + \cdots + \sigma_i \circ \sigma_k(\mathbf{y}_k).$$

由正交性可得, $\mathbf{0} = \sigma_i \circ \sigma_i(\mathbf{y}_i)$. 再由等方性推出

$$\mathbf{0} = \sigma_i(\mathbf{y}_i) = \mathbf{x}_i.$$

于是, $\mathbf{x}_1 = \cdots = \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. 从而 $\mathrm{im}(\sigma_1) + \cdots + \mathrm{im}(\sigma_k)$ 是直和. 由 (4) 看出 $\mathbf{x}$ 关于直和 $\mathrm{im}(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{im}(\sigma_k)$ 的第 i 个投影是 $\sigma_i(\mathbf{x})$. 由 $\mathbf{x}$ 的任意性可知 σ_i 是关于上述直和的第 i 个投影. $\square$

第二章　线性算子

1　不同基底下线性映射的矩阵表示

在本节中 F 是任意域, V 和 W 是 F 上的线性空间, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 是 W 的一组基.

1.1　线性映射下的矩阵（复习和例子）

设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$,

$$\phi(\mathbf{e}_j) = a_{1,j}\epsilon_1 + \cdots + a_{m,j}\epsilon_m = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix},$$

$j = 1, 2, \ldots, n$. 称

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

是 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵(表示). 当 V 和 W 的基底选定后 ϕ 的矩阵是唯一的. 我们有

$$(\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n)) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)A.$$

设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\phi(\mathbf{x})=y_1\epsilon_1+\cdots+y_m\epsilon_m$. 则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例 1.1 设 $V=F^n$, $W=F^m$, $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ 都是标准基. 则 ϕ 的矩阵表示是

$$(\phi(\mathbf{e}_1),\ldots,\phi(\mathbf{e}_n)).$$

例 1.2 设 $\phi: V \longrightarrow W$ 由公式 $\forall\, \mathbf{x}\in V,\ \phi(\mathbf{x})=\mathbf{0}_W$ 给出. 则 ϕ 在 V 和 W 的任意基底下的矩阵都是 $O_{m\times n}$.

例 1.3 设 $\phi: V \longrightarrow V$ 由公式 $\forall\, \mathbf{x}\in V,\ \phi(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ 给出. 则 ϕ 在 V 的任意基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n;\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵都是 E_n.

例 1.4 设 V 是 W 的子空间, $\phi: V \longrightarrow W$ 由公式 $\forall\, \mathbf{x}\in V,\ \phi(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ 给出. 取 W 的基是 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_{n+1},\ldots,\mathbf{e}_m$. 则 ϕ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{pmatrix}.$$

例 1.5 线性空间 V 上的线性函数. 见第一章第三讲例 *5.6.*

例 1.6 设 $A \in F^{m\times n}$, $\phi : F^{n\times k} \longrightarrow F^{m\times k}$ 由公式 $\forall\ X \in F^{n\times k}$, $\phi(X) = AX$ 给出. 求 ϕ 在标准基下的矩阵.

解. 对 $j = 1, 2, \ldots, k$,

$$\overrightarrow{\phi(X)}^{(j)} = A\vec{X}^{(j)}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\phi(X)}^{(1)} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\phi(X)}^{(k)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & O & \cdots & O \\ O & A & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A \end{pmatrix}_{km\times kn}}_{B} \begin{pmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{X}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

矩阵 B 是 ϕ 在标准基下的矩阵. 此时标准基的顺序如下. 设 $E_{i.j} \in F^{n\times k}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$; $L_{i,j} \in F^{m\times k}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 分别是两个矩阵空间的标准基. 则 $F^{n\times k}$ 的标准基排列是

$$E_{1,1}, E_{2,1}, \ldots, E_{n,1}, \ldots, E_{1,k}, \ldots, E_{n,k}.$$

类似地, $F^{m\times k}$ 的标准基排列是

$$L_{1,1}, L_{2,1}, \ldots, L_{m,1}, \ldots, L_{1,k}, \ldots, L_{m,k}.$$

引理 1.7 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$, $M \in F^{k\times \ell}$. 则定义

$$\phi(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) := (\phi(\mathbf{v}_1), \ldots, \phi(\mathbf{v}_k)).$$

则

$$\phi((\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)M)=(\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_k))M.$$

证明. 设 $M=(m_{i,j})_{k\times\ell}$. 则

$$(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)M=\left(\sum_{i=1}^k m_{i,1}\mathbf{v}_i,\ldots,\sum_{i=1}^k m_{i,\ell}\mathbf{v}_i\right).$$

于是

$$\begin{aligned}\phi((\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)M)&=\phi\left(\sum_{i=1}^k m_{i,1}\mathbf{v}_i,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^k m_{i,\ell}\mathbf{v}_i\right)\\&=\left(\phi\left(\sum_{i=1}^k m_{i,1}\mathbf{v}_i\right),\ \ldots,\ \phi\left(\sum_{i=1}^k m_{i,\ell}\mathbf{v}_i\right)\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^k m_{i,1}\phi(\mathbf{v}_i),\ \ldots,\ \sum_{i=1}^k m_{i,\ell}\phi(\mathbf{v}_i)\right)\\&=(\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_k))M.\quad\square\end{aligned}$$

命题 1.8 *设 $A\in F^{m\times n}$. 则存在唯一的 $\phi\in\mathrm{Hom}(V,W)$ 使得 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ 下的矩阵等于 A.*

证明. 设 $\phi\in\mathrm{Hom}(V,W)$ 满足 $\phi(\mathbf{e}_j)=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m)\vec{A}^{(j)}$, $j=1,2,\ldots,n$. 由线性映射基本定理 II 可知 ϕ 存在. 由矩阵表示的定义可知, A 是 ϕ 在选定基底下的矩阵. 映射 ϕ 的唯一性由线性映射基本定理 II 中的唯一性得出. □

定理 1.9 设

$$\begin{array}{rccl}\Phi: & \mathrm{Hom}(V,W) & \longrightarrow & F^{m\times n} \\ & \phi & \mapsto & A, \quad \phi\text{ 在选定基底下的矩阵}\end{array}.$$

则 Φ 是线性同构.

证明. 设 $\phi,\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $A=\Phi(\phi)$ 和 $B=\Phi(\psi)$. 再设 $\alpha,\beta\in F$. 对 $j=1,2,\ldots,n$,

$$\begin{aligned}(\alpha\phi+\beta\psi)(\mathbf{e}_j) &= \alpha\phi(\mathbf{e}_j)+\beta\psi(\mathbf{e}_j) \\ &= \alpha(\epsilon_1,\ldots\epsilon_m)\vec{A}^{(j)}+\beta(\epsilon_1,\ldots\epsilon_m)\vec{B}^{(j)} \\ &= (\epsilon_1,\ldots\epsilon_m)(\alpha\vec{A}^{(j)}+\beta\vec{B}^{(j)}) \\ &= (\epsilon_1,\ldots\epsilon_m)\vec{C}^{(j)}, \quad \text{其中 } C=\alpha A+\beta B.\end{aligned}$$

于是, $\Phi(\alpha\phi+\beta\psi)=C=\alpha A+\beta B=\alpha\Phi(\phi)+\beta\Phi(\psi)$. 映射 Φ 是线性的.

设

$$\begin{array}{rccl}\Theta: & F^{m\times n} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V,W) \\ & A & \mapsto & \phi, \quad \phi\text{ 由命题 1.8 的证明中定义.}\end{array}.$$

根据线性映射基本定理 II 和 命题 1.8, $\Theta\circ\Phi(\phi)=\phi$ 且 $\Phi\circ\Theta(A)=A$. 验证如下. 设 $A=\Phi(\phi)$. 则 $\Theta(A)(\mathbf{e}_j)=(\epsilon_1,\ldots\epsilon_m)\vec{A}^{(j)}$. 于是, $\Theta(A)(\mathbf{e}_j)=\phi(\mathbf{e}_j)$, $j=1,2,\ldots,n$. 由线性映射基本定理 II 可知, $\Theta(A)=\phi$. 反之, 设 $\phi=\Theta(A)$. 则 $\phi(\mathbf{e}_j)=(\epsilon_1,\ldots\epsilon_m)\vec{A}^{(j)}$, $j=1,2\ldots,n$. 于是 $\Phi(\phi)=A$. $\square$

命题 1.10 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵是 A. 设 Z 是 F 上的线性空间 $\delta_1, \ldots, \delta_k$ 是 Z 的一组基, $\psi \in \mathrm{Hom}(W, Z)$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$; $\delta_1, \ldots, \delta_k$ 下的矩阵是 $B \in F^{k\times m}$. 则 $\psi \circ \phi \in \mathrm{Hom}(V, Z)$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$; $\delta_1, \ldots, \delta_k$ 下的矩阵是 $BA \in F^{k\times n}$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi\circ\phi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

证明. 关于 $\psi \circ \phi$ 是线性映射的验证见上学期第二章命题 4.1. 计算

$$\psi \circ \phi(\mathbf{e}_j) = (\psi(\epsilon_1), \ldots, \psi(\epsilon_n))\vec{A}^{(j)} = (\delta_1, \ldots, \delta_k)B\vec{A}^{(j)},$$

$j = 1, 2, \ldots, n$. 于是

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \psi \circ \phi(\mathbf{e}_n)) &= (\delta_1, \ldots, \delta_k)B(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}) \\
&= (\delta_1, \ldots, \delta_k)BA.
\end{aligned}$$

映射 $\psi \circ \phi$ 在选定基底下的矩阵是 BA. □

1.2 线性映射在不同基底下的矩阵

定理 1.11 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 再设 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的另一组基, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 是 W 的另一组基, 且

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P \quad \text{和} \quad (\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_m) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)Q,$$

其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 和 $Q \in \mathrm{GL}_m(F)$. 如果 ϕ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$; $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵是 A, 则 ϕ 在 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$; $\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_m$ 下的矩阵是 $Q^{-1}AP$.

证明. 由 $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P$ 和引理 1.7 得

$$(\phi(\mathbf{e}'_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}'_n)) = (\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n))P.$$

于是

$$(\phi(\mathbf{e}'_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}'_n)) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)AP = (\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_m)Q^{-1}AP. \quad \square$$

上述定理说明线性映射在不同基底下的矩阵有相同的秩.

定义 1.12 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, A 是 ϕ 在 V 的一组基和 W 的一组基下的矩阵. 则 $\mathrm{rank}(A)$ 称为 ϕ 的秩, 记为 $\mathrm{rank}(\phi)$.

例 1.13 计算例 *1.6* 中 ϕ 的秩. 设矩阵 B 由例 *1.6* 给出. 则

$$\mathrm{rank}(\phi) = \mathrm{rank}(B) = k\mathrm{rank}(A).$$