第二章　线性算子

推论 1.14 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 且 $\mathrm{rank}(\phi) = r$. 则存在 V 的一组基 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 和 W 的一组基 $\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_m$ 使得在该基下 ϕ 的矩阵是

$$M = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

且 $r = \dim(\mathrm{im}(\phi))$.

证明. 设 $d = \dim(\ker(\phi))$, $\mathbf{e}'_{n-d+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基. 把它扩充为 V 的一组基

$$\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_{n-d}, \mathbf{e}'_{n-d+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n.$$

因为 $\mathrm{im}(\phi) = \langle \phi(\mathbf{e}'_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}'_n) \rangle$ 且 $\phi(\mathbf{e}'_{n-d+1}) = \cdots = \phi(\mathbf{e}'_n) = \mathbf{0}_W$, 所以

$$\mathrm{im}(\phi) = \langle \phi(\mathbf{e}'_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}'_{n-d}) \rangle.$$

因为 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = n - d$, 所以

$$\epsilon'_1 = \phi(\mathbf{e}'_1), \ldots, \epsilon'_{n-d} = \phi(\mathbf{e}'_{n-d})$$

是 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基. 将其扩充为 W 的一组基

$$\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_{n-d}, \epsilon'_{n-d+1}, \ldots, \epsilon'_m.$$

则 ϕ 在上述基底下的矩阵等于 M. 特别地, $r = n - d$. □

例 1.15 设 $A \in F^{m\times n}$. 证明存在矩阵 $L \in \mathrm{GL}_m(F)$ 和 $R \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$LAR = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

证明. 根据命题 *1.8*, 可设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 使得 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵等于 A. 由推论 *1.14*, 存在 V 的一组基 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 和 W 的一组基 $\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_m$ 使得在该基下 ϕ 的矩阵是

$$M = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

设 $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P$ 和 $(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_m) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)Q$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$, $Q \in \mathrm{GL}_m(F)$. 根据定理 *1.11*,

$$M = Q^{-1}AP. \quad \square$$

注解 1.16 根据推论 *1.14*, 第一章第二讲命题 *4.14 (iii)* 可写为

$$\dim(\ker(\phi)) + \mathrm{rank}(\phi) = \dim(V).$$

例 1.17 设 $\phi : F^{m\times n} \longrightarrow F^{n\times m}$ 由公式 $\phi(X) = X^t$ 给出. 求 $\mathrm{rank}(\phi)$.

解. 因为 ϕ 是单射, 所以 $\dim(\ker(\phi)) = 0$. 于是

$$\mathrm{rank}(\phi) = mn.$$

推论 1.18 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 则

(i) ϕ 是单射当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi) = \dim(V)$.

(ii) ϕ 是满射当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi) = \dim(W)$.

(iii) 如果 ϕ 是双射, 则 $\dim(V) = \dim(W)$.

证明. (i) ϕ 单当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_V\}$ (第一章第一讲命题 2.2) 当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi) = \dim(V)$ (上述注释).

(ii) ϕ 满当且仅当 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = \dim(W)$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi) = \dim(W)$ (推论 1.14).

(iii) 由 (i) 和 (ii) 可知, $\dim(V) = \mathrm{rank}(\phi)$ 且 $\dim(W) = \mathrm{rank}(\phi)$. □

推论 1.19 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 且 $\dim(V) = \dim(W)$. 则以下断言等价

(i) ϕ 是单射.

(ii) ϕ 是满射.

(iii) ϕ 是双射.

证明. 设 $n = \dim(V)$, $r = \mathrm{rank}(\phi)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). 由上述推论 (i), $r = n$. 于是 $r = \dim(W)$. 从而, ϕ 是满射(上述推论 (ii)).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 由上述推论 (ii), $r=n$. 于是 $r=\dim(V)$. 从而, ϕ 是单射(上述推论 (i)), 即 ϕ 是双射.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 显然. $\square$

推论 1.20 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, A 是 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ 下的矩阵. 则

(i) ϕ *是单射当且仅当* A *列满秩, 即* $\mathrm{rank}(A)=n$.

(ii) ϕ *是满射当且仅当* A *行满秩, 即* $\mathrm{rank}(A)=m$.

(iii) ϕ *是双射, 则* A *是可逆方阵.*

证明. 注意到 $A \in F^{m\times n}$.

(i) ϕ 单当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi)=n$, 即 $\mathrm{rank}(A)=n$. (推论 1.18 (i))

(ii) ϕ 满当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi)=m$, 即 $\mathrm{rank}(A)=m$. (推论 1.18 (ii))

(iii) 由 (i) 和 (ii) 直接得出. $\square$

例 1.21 设 $A \in F^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r>0$. 则存在列满秩矩阵 $L \in F^{m\times r}$ 和行满秩矩阵 $R \in F^{r\times n}$ 使得 $A=LR$.

证明. 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ 在基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ 下的矩阵等于 A. 则 $\mathrm{rank}(\phi)=r$. 于是 $\ker(\phi)$ 的维数是 $n-r$. *(见注释 1.16.)* 从而 $V/\ker(\phi)$ 的维数等于 r. *(见第一章第二讲引理 4.13.)* 由线性映射基本定理 I 可

知, $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$, 其中 $\pi : V \longrightarrow V/\ker(\phi)$ 是线性满射, $\bar{\phi} : V/\ker(\phi) \longrightarrow W$ 是线性单射. 设 $\delta_1, \ldots, \delta_r$ 是 $V/\ker(\phi)$ 一组基, R 是 π 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n; \delta_1, \ldots, \delta_r$ 下的矩阵, L 是 $\bar{\phi}$ 在 $\delta_1, \ldots, \delta_r; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵. 则 $A = LR$ *(命题 1.10)*, 且 L 列满秩, R 行满秩. $\square$

上述结果曾在上学期用矩阵打洞技术证明(见上学期第二章第六讲例 10.7).

1.2 对偶映射

设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 则

$$\begin{aligned} \phi^* : \ W^* &\longrightarrow V^* \\ f &\mapsto f \circ \phi \end{aligned}$$

是从 W^* 到 V^* 的映射.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f\circ\phi"'] & W \arrow[d, "f"] \\ & F \end{tikzcd}$$

引理 1.22 设 $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\sigma \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $\tau \in \mathrm{Hom}(W, Z)$, $\alpha \in F$. 则

$$(\phi + \psi) \circ \sigma = \phi \circ \sigma + \psi \circ \sigma,$$

$$\tau \circ (\phi + \psi) = \tau \circ \phi + \tau \circ \psi,$$

和

$$(\alpha\phi)\circ\sigma = \phi\circ(\alpha\sigma) = \alpha(\phi\circ\sigma).$$

证明. 设 $\mathbf{u}\in U$. 则

$$\begin{aligned}(\phi+\psi)\circ\sigma(\mathbf{u}) &= (\phi+\psi)(\sigma(\mathbf{u}))\\ &= \phi(\sigma(\mathbf{u}))+\psi(\sigma(\mathbf{u}))\\ &= \phi\circ\sigma(\mathbf{u})+\psi\circ\sigma(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

由 $\mathbf{u}$ 的任意性可知 $(\phi+\psi)\circ\sigma = \phi\circ\sigma+\psi\circ\sigma$. 类似可证 $\tau\circ(\phi+\psi) = \tau\circ\phi+\tau\circ\psi$.

$$(\alpha\phi)\circ\sigma(\mathbf{u}) = (\alpha\phi)(\sigma(\mathbf{u})) = \alpha\phi(\sigma(\mathbf{u})) = \alpha\phi\circ\sigma(\mathbf{u}),$$

且

$$\phi\circ(\alpha\sigma(\mathbf{u})) = \phi(\alpha\sigma(\mathbf{u})) = \alpha\phi(\sigma(\mathbf{u}) = \alpha\phi\circ\sigma(\mathbf{u}).$$

于是, $(\alpha\phi)\circ\sigma = \phi\circ(\alpha\sigma) = \alpha(\phi\circ\sigma)$. □

下面我们来验证 $\phi^*\in \mathrm{Hom}(W^*,V^*)$. 设 $\alpha,\beta\in F$, $f,g\in W^*$.

$$\phi^*(\alpha f+\beta g) = (\alpha f+\beta g)\circ\phi = \alpha f\circ\phi+\beta g\circ\phi = \alpha\phi^*(f)+\beta\phi^*(g).$$

验证完毕. 我们称 ϕ^* 是 ϕ 的对偶映射.

命题 1.23 设 $\phi\in\mathrm{Hom}(V,W)$ 在基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ 下的矩阵为 $A=(a_{i,j})_{m\times n}$. 则对偶映射 ϕ^* 在对偶基 $\epsilon_1^*,\ldots,\epsilon_m^*$ 和 $\mathbf{e}_1^*,\ldots,\mathbf{e}_n^*$ 下的矩阵是 A^t.

证明. 我们先计算 $\phi^*(\epsilon_i^*)$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵, $i = 1, 2, \ldots, m$. 对任意 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\phi^*(\epsilon_i^*)(\mathbf{e}_j) = \epsilon_i^*(\phi(\mathbf{e}_j)) = \epsilon_i^*(a_{1,j}\epsilon_1 + \cdots + a_{m,j}\epsilon_m) = a_{i,j}.$$

则对于 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$,

$$\begin{aligned}\phi^*(\epsilon_i^*)(\mathbf{x}) &= a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n \\ &= a_{i,1}\mathbf{e}_1^*(\mathbf{x}) + \cdots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^*(\mathbf{x}) \\ &= (a_{i,1}\mathbf{e}_1^* + \cdots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^*)(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

于是,

$$\phi^*(\epsilon_i^*) = a_{i,1}\mathbf{e}_1^* + \cdots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^* = (\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*)\begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*)\vec{A^t}^{(i)}.$$

由此得出 A^t 是 ϕ^* 在 $\epsilon_1^*, \ldots, \epsilon_m^*$ 和 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 下的矩阵. □

该命题的一个直接推论是 ϕ 和 ϕ^* 的秩相等.

2 线性算子代数和矩阵相似

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 集合 $\mathrm{Hom}(V, V)$ 记为 $\mathcal{L}(V)$, 其中的元素称为*线性算子*. 线性算子通常用 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots,$ 表示. 特别地 $\mathcal{O}$ 代表 V 上的零算子(映射), $\mathcal{E}$ 代表 V 上的恒等算子(映射).

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 算子 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵，简称 $\mathcal{A}$ 为在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵.

2.1 线性算子代数

我们已经知道 $(\mathcal{L}(V), +, \mathcal{O}, \text{数乘})$ 是 F 上的线性空间. 注意到任何两个 V 上的线性算子都可以复合, 且对任意 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$,

$$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} \quad \text{和} \quad \mathcal{A} \circ \mathcal{E} = \mathcal{E} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

再由引理 1.22 可知, $(\mathcal{L}(V), +, \mathcal{O}, \circ, \mathcal{E})$ 是一个环. 此外对任意 $\alpha \in F$,

$$\alpha(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = (\alpha\mathcal{A}) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ (\alpha\mathcal{B}).$$

这个性质使得我们称 $\mathcal{L}(V)$ 是 F 上的一个代数.

定理 2.1 *设*

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathcal{L}(V) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(F) \\ & \mathcal{A} & \mapsto & A, \quad \mathcal{A} \text{ 在 } \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \text{ 下的矩阵} \end{array}$$

则 Φ 既是线性同构又是环同构(此时称 Φ 是代数同构).

证明. 根据定理 1.9, Φ 是线性同构. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$, 它们在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵分别是 A, B. 根据命题 1.10, $\Phi(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = AB = \Phi(\mathcal{A})\Phi(\mathcal{B})$. 可直接验证 $\Phi(\mathcal{E}) = E_n$. $\square$.

为了简洁, $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$ 也写成 $\mathcal{AB}$. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}$ 可逆, 则称 $\mathcal{A}$ 是可逆算子. 如果存在 $\lambda\in F$ 使得对任意 $\mathbf{x}\in V$, $\mathcal{A}(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是数乘算子. 此时 $\mathcal{A}=\lambda\mathcal{E}$. 如果存在 $k\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $\mathcal{A}^k=\mathcal{O}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是幂零算子. 如果 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是幂等算子.

由上述定理可知, $\mathcal{A}$ 是可逆(数乘, 幂零, 幂等)算子当且仅当 $\Phi(\mathcal{A})$ 是(数乘, 幂零, 幂等)矩阵.

例 2.2 设 $\mathcal{D}:\mathbb{R}[x]_n\longrightarrow\mathbb{R}[x]_n$ 由公式 $\mathcal{D}(f)=f'$ 定义. 则 $\mathcal{D}^n=\mathcal{O}$. 该算子在 $1,x,\ldots,x^{n-1}$ 下的矩阵见第一章第三讲例 *5.7*.

例 2.3 设 U_1,U_2 是 V 的子空间满足 $V=U_1\oplus U_2$. 设 π_i 是 V 关于上述直和到 U_i 的投影, $i=1,2$. 因为关于直和的投影具有等方性*(*见第一章第七讲命题 *12.2(ii))*, 所以 π_1 和 π_2 都是幂等的. 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d$ 是 U_1 的基, $\mathbf{e}_{d+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 U_2 的基. 则 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d,\mathbf{e}_{d+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的基. 在该基下 π_1 和 π_2 的矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_{n-d} \end{pmatrix}.$$

2.2 矩阵的相似

设 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 是 V 的另一组基, 且 $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P$, 其中 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$. 设算子 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩

阵等于 A. 根据定理 1.11, $\mathcal{A}$ 在 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 下的矩阵等于 $P^{-1}AP$. 我们的问题是如何选取 V 的一组基使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵尽可能简单(零元素尽可能多,非零元出现的尽可能有规律).

定义 2.4 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 如果存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 B 与 A 相似. 记为 $B \sim_s A$.

验证相似是等价关系如下. 对任意 $A \in \mathrm{M}_n(F)$, $A = E^{-1}AE$. 于是 $A \sim_s A$. 自反性成立. 设 $B \sim_s A$. 则存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 于是 $A = PBP^{-1}$, $A \sim_s B$. 对称性成立. 设 $A \sim_s B$, $B \sim_s C$. 则存在 $P, Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$ 和 $C = Q^{-1}BC$. 于是 $C=Q^{-1}P^{-1}APQ=(PQ)^{-1}A(PQ)$, 即 $A\sim_s C$. 传递性成立.

两个矩阵相似当且仅当它们是同一个线性映射在不同基底下的矩阵. 于是我们的问题可等价地叙述为给定矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 研究并计算与 A 相似的尽可能简单的矩阵.

命题 2.5 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 如果 $A \sim_s B$, 则

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B), \quad \det(A) = \det(B), \quad \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B).$$

证明. 设 $B = P^{-1}AP$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$. 因为乘以可逆矩阵不改变矩阵的秩, 所以 $\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A)$. 由行列式乘法定理可知, $\det(B) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$.

为了证明 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$. 我们首先注意到迹是交换不变量, 即对任意 $M=(m_{i,j}), N=(n_{i,j})\in \mathrm{M}_n(F)$,

$$\mathrm{tr}(MN)=\mathrm{tr}(NM).$$

(见上学期第二章第 5 讲命题 7.8.)

我们由 $\mathrm{tr}(B)=\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(PP^{-1}A)=\mathrm{tr}(A)$. □

例 2.6 证明:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \not\sim_s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 因为这两个矩阵的迹不同, 所以它们不相似.

例 2.7 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

问 A 和 B 是否相似?

证明. 设 $P\in \mathrm{GL}_2(F)$ 使得 $B=P^{-1}AP$. 则 $PB=AP$, 即 $P(E+C)=P$. 其中

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $PC=O$. 因为 P 可逆, 所以 $C=O$. 矛盾. 这两个矩阵不相似. □