第二章　线性算子

10　循环子空间分解

定理 10.1 *(循环子空间分解)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则存在 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ 使得

$$V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_1) \oplus \cdots \oplus (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_\ell).$$

证明. 设 $n = \dim(V)$. 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 结论成立. 设 $n > 1$ 且结论对维数小于 n 的任何线性空间成立.

考虑 n 维情形. 如果 V 是 $\mathcal{A}$-循环的, 取 $\ell = 1$ 即可. 否则, 存在 $\mathbf{w} \in V$ 使得 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$ 在所有 $\mathcal{A}$ 循环子空间中维数最大. 设该维数等于 m. 则 $0 < m < n$. 我们将构造一个 $\mathcal{A}$-子空间 W 使得 $V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \oplus W$. 然后把归纳假设用到 W 上即可.

把 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$ 的基底 $\mathbf{w}, \mathcal{A}(\mathbf{w}), \ldots, \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})$ 扩充为 V 的一组基

$$\mathbf{w}, \mathcal{A}(\mathbf{w}), \ldots, \mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w}), \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}), \epsilon_{m+1}, \ldots, \epsilon_n.$$

由线性映射基本定理 II, 存在唯一的线性函数 $f \in V^*$ 满足

$$f(\mathcal{A}^i(\mathbf{w})) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-2,$$

和

$$f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}))=1, \quad f(\epsilon_j)=0,\ j=m+1,\ldots,n.$$

设 $f_k=f\circ\mathcal{A}^k, k=0,1,\ldots,m-1$, 且

$$W=\cap_{k=0}^{m-1}\ker(f_i).$$

我们来验证以下三个断言.

(i) $\dim(W)=n-m$;

(ii) $(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w})\cap W=\{\mathbf{0}\}$;

(iii) W 是 $\mathcal{A}$-不变的.

断言 (i) 和 (ii) 保证 $V=(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w})\oplus W$. 而断言 (iii) 保证归纳假设可以应用到 W 上.

验证断言(i). 我们首先看 f_k 在基底

$$\mathbf{w},\mathcal{A}(\mathbf{w}),\ldots,\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}),\epsilon_{m+1},\ldots,\epsilon_n \tag{1}$$

下的矩阵, $k=0,1,\ldots,m-1$. 线性函数 $f_0=f$ 在基底 (1) 和 1 下的矩阵是

$$\begin{aligned}&=(f(\mathbf{w}),\ldots,f(\mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w})),f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})),f(\epsilon_{m+1}),\ldots,f(\epsilon_n))\\&=(1)(\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1},1,\underbrace{0,\ldots0}_{n-m})=(\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1},1,\underbrace{0,\ldots0}_{n-m})=:B_0\end{aligned}$$

而 f_k 在基底 (1) 下的矩阵是

$$\begin{aligned}
&= (f(\mathcal{A}^k(\mathbf{w})), \dots, f(\mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w})), f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})),\\
&\quad f(\mathcal{A}^m(\mathbf{w})), \dots, f(\mathcal{A}^{m-1+k}(\mathbf{w})), f(\mathcal{A}^k(\epsilon_{m+1})), \dots, f(\mathcal{A}^k(\epsilon_n)))\\
&= (1)(\underbrace{0, \dots, 0}_{m-k-1}, 1, \underbrace{*, \dots *}_{n-m+k}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{m-k-1}, 1, \underbrace{*, \dots *}_{n-m+k}) := B_k,
\end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, m-1$. 设 $\mathbf{x} \in V$ 在基底 (1) 下的的坐标是 $(x_1, \dots, x_n)^t$. 则

$$\begin{pmatrix} f_0(\mathbf{x}) \\ f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{m-1}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}_{m \times n}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

于是, $\cap_{i=0}^{m-1} \ker(f_i)$ 的维数等于以 C 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间的维数, 即 $n - \operatorname{rank}(C) = n - m$.

验证断言 *(ii)*. 设 $\mathbf{x} \in (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \cap W$ 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. 则存在 $p \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in F$, $\alpha_p \neq 0$, 使得

$$\mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{w} + \alpha_1 \mathcal{A}(\mathbf{w}) + \cdots + \alpha_p \mathcal{A}^p(\mathbf{w}).$$

则

$$\begin{aligned}
0 &= f_{m-1-p}(\mathbf{x}) \\
&= \alpha_0 f_{m-1-p}(\mathbf{w}) + \cdots + \alpha_{p-1} f_{m-1-p}(\mathcal{A}^{p-1}(\mathbf{w})) + \alpha_p f_{m-1-p}(\mathcal{A}^{p}(\mathbf{w})) \\
&\qquad (f_{m-1-p} \text{ 线性}) \\
&= \alpha_0 f(\mathcal{A}^{m-1-p}(\mathbf{w})) + \cdots + \alpha_{p-1} f(\mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w})) + \alpha_p f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})) \\
&\qquad (f_0, \ldots, f_p \text{ 和 } \mathbf{w} \text{ 的定义}) \\
&= \alpha_p.
\end{aligned}$$

矛盾. 断言 (ii) 成立.

验证断言 (iii). 设 $\mathbf{x} \in W$. 则对任意 $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$,

$$f_k(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A}^k(\mathbf{x})) = 0.$$

设 $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$. 则对任意 $k \in \{0, 1, \ldots, m-2\}$,

$$f_k(\mathbf{y}) = f_k(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = f_{k+1}(\mathbf{x}) = 0.$$

还需要验证 $f_{m-1}(\mathbf{y}) = 0$. 由 m 的极大性可知,

$$\dim(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{x}) \leq m.$$

根据第二章第四讲命题 9.2 (iii), 存在 $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1} \in F$, 使得

$$\mathcal{A}^m(\mathbf{x}) = \beta_0 \mathbf{x} + \beta_1 \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \cdots + \beta_{m-1} \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x}).$$

于是

$$
\begin{aligned}
f_{m-1}(\mathbf{y}) &= f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{y})) \quad (f_{m-1}\text{ 的定义}) \\
&= f(\mathcal{A}^{m}(\mathbf{x})) \quad (\mathbf{y}\text{ 的定义}) \\
&= f(\beta_0\mathbf{x}+\beta_1\mathcal{A}(\mathbf{x})+\cdots+\beta_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x})) \quad (\text{见上式}) \\
&= \beta_0 f(\mathbf{x})+\beta_1 f(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\cdots+\beta_{m-1} f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x})) \quad (f\text{ 线性}) \\
&= \beta_0 f_0(\mathbf{x})+\beta_1 f_1(\mathbf{x})+\cdots+\beta_{m-1} f_{m-1}(\mathbf{x}) \\
&\qquad (f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}\text{ 的定义}) \\
&= 0 \quad (\mathbf{x}\in W).
\end{aligned}
$$

于是 $\mathbf{y}\in W$. 断言 (iii) 成立. □

定理 10.2 *(Hamilton-Cayley 定理的加强版)* 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则

(i) $\mu_{\mathcal{A}}(t)|\chi_{\mathcal{A}}(t)$;

(ii) $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 的因子.

证明. 由循环子空间分解定理,

$$V = U_1\oplus\cdots\oplus U_\ell,$$

其中 $U_1,\ldots,U_\ell$ 是非零的 $\mathcal{A}$-循环子空间. 特别地, $U_1,\ldots,U_\ell$ 是 $\mathcal{A}$-不变的(第二章第四讲命题 9.2 (ii)). 令

$$\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_{U_i},\quad \mu_i=\mu_{\mathcal{A}_i},\quad \chi_i=\chi_{\mathcal{A}_i},\quad i=1,2,\ldots,\ell.$$

根据第二章第三讲定理 5.9, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_\ell \end{pmatrix}.$$

且

$$\mu_{\mathcal{A}}=\operatorname{lcm}(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\ell).$$

由第二章第三讲例 7.14,

$$\chi_{\mathcal{A}}=\chi_1\chi_2\cdots\chi_\ell.$$

由第二章第四讲引理 9.5, $\mu_i=\chi_i$, $i=1,2,\ldots,\ell$. 故上式可以写为:

$$\chi_{\mathcal{A}}=\mu_1\mu_2\cdots\mu_\ell.$$

于是, $\mu_{\mathcal{A}}(t)|\chi_{\mathcal{A}}(t)$. (i) 成立. 设 p 是 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的一个不可约因子. 则 p 整除某个 μ_i (见上学期第五章第二讲引理 3.4). 由此可知, $p|\mu_{\mathcal{A}}$ □

注解 10.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}=p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}$ 是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解. 则 $\chi_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解是

$$\chi_{\mathcal{A}}=p_1^{n_1}\cdots p_s^{n_s},$$

其中 $m_1\le n_1,\ldots,m_s\le n_s$ 且 $n_1+\cdots+n_s=n$.

推论 10.4 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 则

(i) $\mu_A(t) | \chi_A(t)$*;*

(ii) $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_A(t)$ 的因子.

引理 10.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则 U 是 $\mathcal{A}$-不可分的当且仅当下述两个条件都成立.

(i) U 是 $\mathcal{A}$-循环子空间*;*

(ii) $\mu_{\mathcal{A}_U}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次.

证明. 设 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间. 则 U 是 $\mathcal{A}$-子空间. 根据定理 10.1, U 是若干 $\mathcal{A}_U$-循环子空间的直和, 也是若干 $\mathcal{A}$-循环子空间的直和. 因为 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间, 所以直和项只有一个, 即 U 是 $\mathcal{A}$-循环的. 进而, $\mu_{\mathcal{A}_U}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次. 否则, 由补充材料中推论 1.2 或核核分解定理可知, U 关于 $\mathcal{A}_U$ 的核核分解的直和项不止一个, 与 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间矛盾.

反之, 设条件 (i) 和 (ii) 满足. 设 $\mu_{\mathcal{A}_U} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$ 不可约, $m > 0$. 因为 U 是 $\mathcal{A}$-循环子空间, 所以 U 是 $\mathcal{A}_U$-循环空间. 由第二章第四讲引理 9.5,

$$\dim(U) = m \deg(p).$$

假设 $U=U_1\oplus U_2$, 其中 U_1,U_2 是正维数的 $\mathcal{A}$-子空间. 则它们也是 $\mathcal{A}_U$-子空间. 则 $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}|p^m$ 且 $\mu_{\mathcal{A}_{U_2}}|p^m$ (第二章第二讲引理 4.2). 但

$$p^m=\operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{U_1}},\mu_{\mathcal{A}_{U_2}})$$

(第二章第三讲引理 5.7). 于是, $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}},\mu_{\mathcal{A}_{U_2}}$ 至少有一个等于 p^m. 不妨设 $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}=p^m$, 根据 Hamilton-Cayley 定理, $\chi_{\mathcal{A}_{U_1}}$ 有因子 p^k, 其中 $k\geq m$. 于是,

$$\dim(U_1)\geq m\deg(p)=\dim(U).$$

矛盾. □

定理 10.6 *设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则存在 $\mathcal{A}$-不可分子空间 $W_1,\ldots,W_k$ 使得*

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$$

且 W_i 是 $\mathcal{A}$-循环的, $\mu_{\mathcal{A}_{W_i}}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次, $i=1,2,\ldots,k$.

证明. 结合引理 10.6 和第二章第三讲命题 6.2 即可. □

例 10.7 *设 $\mathcal{D}$ 是 $R[x]_n$ 上的导数算子. 则 $\mu_{\mathcal{D}}=t^n$ 且 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$-循环的(第二章第四讲定理 9.11). 于是, $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$-不可分的.* □

11 复数域上的 Jordan 标准型（存在性）

记号: 在本节中 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间.

引理 11.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$. 此时, $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 的某组基下的矩阵是

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{2}$$

证明. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$. 则 V 是 $\mathcal{A}$-循环的(第二章第四讲定理 9.11, 即循环空间判别法). 由引理 10.5 可知, V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 反之, 设 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 同样的引理蕴含 $\mu_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathbb{C}[t]$ 中某个首一的不可约多项式的幂次. 由代数学基本定理, $\mu_{\mathcal{A}}$=$(t-\lambda)^m$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $m \in \mathbb{Z}^+$. 该引理还蕴含 V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 于是 m=n (第二章第四讲定理 9.11).

设 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的, $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ 且 $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$.

断言. 令 $\epsilon_j = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-j}(\mathbf{v})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, 是 V 的一组基.

断言的证明. 只要证明 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 线性无关即可.

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ 使得

$$\alpha_1\epsilon_1 + \cdots + \alpha_n\epsilon_n = \mathbf{0}.$$

则

$$\alpha_1(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-1}(\mathbf{v}) + \cdots + \alpha_{n-1}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{v}) + \alpha_n\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

令 $f(t) = \alpha_1(t-\lambda)^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}(t-\lambda) + \alpha_n$. 则 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. 设 $\mathbf{x} \in V$. 则存在 $g(t) \in \mathbb{C}[t]$ 使得 $\mathbf{x} = g(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ (第二章第四讲命题 9.2 (i)). 于是,

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = g(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = g(\mathcal{A})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

由 $\mathbf{x}$ 的任意性可知, $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 因为 $\deg(f) < n$, 所以 $f(t) = 0$. 通过分析 f 的次数, 我们得到

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

断言成立.

下面我们计算 $\mathcal{A}$ 在 V 的基底 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵. 设 $j = 2, \ldots, n$. 则

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\epsilon_j) &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})(\epsilon_j) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-j}(\mathbf{v})) + \lambda\mathcal{E}(\epsilon_j) \\ &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-j+1}(\mathbf{v}) + \lambda\epsilon_j = \epsilon_{j-1} + \lambda\epsilon_j.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\epsilon_1) &= (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E})(\epsilon_1) = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})((\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\mathbf{v}))+\lambda\mathcal{E}(\epsilon_1)\\ &= (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^n(\mathbf{v})+\lambda\epsilon_1 = \lambda\epsilon_1.\end{aligned}$$

于是

$$\mathcal{A}(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n) = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}. \quad \square.$$

我们称 (2) 中的矩阵为*关于 λ 的 n 阶 Jordan 块.*

Jordan 块的若干基本性质如下.

注解 11.2

(i) 如果 $\lambda\neq 0$, 则 $\mathrm{rank}(J_n(\lambda))=n$. 而 $\mathrm{rank}(J_n(0))=n-1$;

(ii) $J_n(\lambda) = \lambda E_n + J_n(0)$;

(iii) $J_n(\lambda)$ 的极小和特征多项式都等于 $(t-\lambda)^n$; 从而把 $J_n(\lambda)$ 看成 $\mathbb{C}^n$ 上的算子后, $\mathbb{C}^n$ 是 $J_n(\lambda)$-循环的;

(iv) $J_n(\lambda)$ 的唯一的特征值是 λ, 而对应的特征子空间的维数等于 1, 这是因为

$$J_n(\lambda) - \lambda E_n = J_n(0),$$

其秩等于 $n-1$.

(v) $J_n(\lambda)$ 可对角化当且仅当 $n=1$.

定理 11.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 $d_1,\ldots,d_k\in\mathbb{Z}^+$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{C}$, 都不必两两不同.

证明. 由定理 10.6 可知

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k,$$

其中 W_i 是 d_i-维 $\mathcal{A}$-不可分子空间, $i=1,2,\ldots,k$. 由引理 10.5 和代数学基本定理, $\mathcal{A}_{W_i}$ 的极小多项式是 $(t-\lambda_i)^{d_i}$. 根据引理 11.1, $\mathcal{A}_{W_i}$ 在 W_i 的某组基下的矩阵是 $J_{d_i}(\lambda_i)$. 再由第二章第三讲定理 5.9, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 11.4 设 $\mathcal{D}:\mathbb{C}[x]^{(n)}\longrightarrow\mathbb{C}[x]^{(n)}$ 是导数算子. 计算 $\mathcal{D}$ 的 *Jordan* 标准型.

解.由例 *10.7*, $\mathbb{C}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$-不可分的. 于是, $\mathcal{D}$ 的 *Jordan* 标准型是 $J_n(0)$. 注意到

$$\mathbb{C}[x]^{(n)}=\mathbb{C}[\mathcal{D}]\cdot x^{n-1}.$$

由引理 *11.1* 可知 $\mathcal{D}$ 在基底

$$\mathcal{D}^{n-j}(x^{n-1})=\frac{(n-1)!}{j!}x^j,\quad j=1,2,\ldots,n$$

下的矩阵是 $J_n(0)$. □

推论 11.5 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 则 A 相似于

$$J_A=\begin{pmatrix}J_{d_1}(\lambda_1)&O&\cdots&O\\O&J_{d_2}(\lambda_2)&\cdots&O\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\O&O&\cdots&J_{d_k}(\lambda_k)\end{pmatrix},$$

其中 $d_1,\ldots,d_k\in\mathbb{Z}^+$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{C}$, 都不必两两不同.

例 11.6 设 $A\in\mathrm{M}_n(F)$.

- $n=1$. $(a)=J_1(a)$.
- $n=2$. 设 $\chi_A=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$. 如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 则根据第二章第四讲推论 *8.8*,

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1(\lambda_1)&0\\0&J_1(\lambda_2)\end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1=\lambda_2=:\lambda$. 如果 $\mu_A=t-\lambda$, 则根据可对角化判别法 V,

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1(\lambda)&0\\0&J_1(\lambda)\end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A=(t-\lambda)^2$, 则 A 对应循环算子*(第二章第四讲定理 9.11)*. 再根据引理 *10.5*, F^2 是 A-不可分的. 于是

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}=J_2(\lambda).$$

- $n=3$. 设$\chi_A=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$. 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同, 则根据第二章第四讲推论 *8.8*,

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1(\lambda_1)&0&0\\0&J_1(\lambda_2)&0\\0&0&J_1(\lambda_3)\end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3$. 如果 $\mu_A=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$, 则根据可对角化判别法 V,

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1(\lambda_1)&0&0\\0&J_1(\lambda_2)&0\\0&0&J_1(\lambda_2)\end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)^2$, 则 A 对应循环算子*(第二章第四讲定理 9.11)*. 再根据引理 *10.5*, F^3 不是

A-不可分的. 故

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & O_{1\times 2} \\ O_{2\times 1} & J_2(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =: \lambda$. 如果 $\mu_A = t - \lambda$, 则根据可对角化判别法 V,

$$A \sim_s \lambda E_3 = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t-\lambda)^2$, 则 A 对应算子不是循环的*(*第二章第四讲定理 *9.11)*. 再根据引理 *10.5*, F^3 不是 A-不可分的. 故

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & O \\ O & J_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t-\lambda)^3$, 则 A 对应算子是循环的*(*第二章第四讲定理 *9.11)*. 再根据引理 *10.5*, F^3 是 A-不可分的,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_3(\lambda).$$

例 11.7 设

$$J_2(0)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}J_2(0)&O\\O&O\end{pmatrix}_{4\times 4},\quad B=\begin{pmatrix}J_2(0)&O\\O&J_2(0)\end{pmatrix}.$$

则 $\mu_A=\mu_B=t^2$ 且 $\chi_A=\chi_B=t^4$. 通过极小多项式和特征多项式, 我们仍无法在相似的意义下区分 A 和 B. 注意到 $\mathrm{rank}(A)\neq\mathrm{rank}(B)$. 于是, $A\not\sim_s B$.

J_A 中的矩阵称为 $\mathcal{A}$ 的一个 *Jordan* 标准型. J_A 的基本性质如下:

注解 11.8 *(i)* $\mathrm{rank}(J_A)=\sum_{i=1}^k\mathrm{rank}(J_{d_i}(\lambda_i))$;

(ii) J_A 的(也是 A 的)极小多项式等于

$$\mathrm{lcm}((t-\lambda_1)^{d_1},\ldots,(t-\lambda_k)^{d_k});$$

特征多项式等于

$$(t-\lambda_1)^{d_1}\cdots(t-\lambda_k)^{d_k};$$

(iii) 设 $\lambda\in\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$. 则 J_A 中至少有一个关于 λ 的 *Jordan* 块.

(iv) λ 的代数重数等于 λ 在 J_A 主对角线上出现的次数; λ 的几何重数等于关于 λ 的 *Jordan* 块在 J_A 中出现的次数;

(v) λ 在极小多项式中的重数等于 J_A 中关于 λ 的 *Jordan* 块出现的最大阶数.

(vi) A 可对角化当且仅当 $d_1 = \cdots = d_k = 1$.

性质 (i) 来自 J_A 是分块对角矩阵.

性质 (ii) 成立是因为第二章第三讲定理 5.9 和第二章第三讲例 7.14.

性质 (iii) 成立是因为 $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.

性质 (iv) 中的第一部分可由 (i) 中特征多项式的形式直接得出. 下面来验证性质 (iv) 的第二部分. 注意到

$$J_A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) - \lambda E_{d_1} & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) - \lambda E_{d_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) - \lambda E_{d_k} \end{pmatrix}.$$

因为

$$\operatorname{rank}(J_{d_i}(\lambda_i) - \lambda E_{d_i}) = \begin{cases} d_i, & \lambda \neq \lambda_i, \\ d_i - 1, & \lambda = \lambda_i, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, k$. 于是,

$$\operatorname{rank}(J_A - \lambda E_n) = n - (J_A \text{ 中关于 } \lambda \text{ 的 Jordan 块出现的次数}).$$

由此和矩阵的秩和解空间维数的关系得出 $\dim(V^\lambda)$ 等于 J_A 中关于 λ 的 Jordan 块出现的次数. 于是, (iv) 成立.

性质 (v) 来自于 (i) 中极小多项式的形式.

最后, 我们来验证性质 (vi). 如果 $d_1 = \cdots = d_k = 1$, 则 J_A 可对角化. 于是, A 可对角化. 反之, A 可对角化蕴含 μ_A 中每个因子的重数都等于 1 (对角化判别法 V). 由性质 (v), J_A 是对角阵.

例 11.9 设 $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

计算 J_A.

解. 直接计算得 $\chi_A = (t-\alpha)^3$. 于是, α 是 A 唯一的特征根, 其代数重数等于 *3*.

$$\operatorname{rank}(A - \alpha E) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此看出, 当 $\alpha \neq 0$ 时, $\operatorname{rank}(A - \alpha E) = 1$. 故 α 的几何重数等于 *2*. 由基本性质 *(iv)*,

$$J_A = \begin{pmatrix} J_2(\alpha) & O \\ O & J_1(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

当 $\alpha=0$ 时, $\mathrm{rank}(A-\alpha E)=0$. 故 α 的几何重数等于 *3*. 由基本性质 *(iv)*,

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(0) \end{pmatrix}=O_{3\times 3}. \quad \square$$

例 11.10 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算 J_A.

解. 直接计算得 $\chi_A=(t-2)(t-1)^2$. 于是, 2 的代数和几何重数都等于 *1*. 故 $J_1(2)$ 在 J_A 中出现一次. 注意到 1 的几何重数等于

$$3-\mathrm{rank}(A-E)=3-\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=1.$$

故 $J_2(1)$ 在 J_A 中出现一次. 由此得出

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(2) & O \\ O & J_2(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 11.11 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4&-5&2\\0&5&-7&3\\0&6&-9&4\end{pmatrix}.$$

计算 J_A.

解. 直接计算得 χ_A=$(t-1)^2t^2$. 注意到 1 的几何重数等于

$$4-\operatorname{rank}(A-E)=4-\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&3&-5&2\\0&5&-8&3\\0&6&-9&3\end{pmatrix}=2.$$

故 $J_1(1)$ 在 J_A 中出现两次*(1 的代数重数是 2)*. 0 的几何重数等于

$$4-\operatorname{rank}(A)=1.$$

故 $J_2(0)$ 在 J_A 中出现一次.

$$J_A=\begin{pmatrix}J_1(1)&&\\&J_1(1)&\\&&J_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.\quad\square$$

例 11.12 设 $S\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 满足 $S^2-nS=O$. 求 J_S.

解. 设 $f(t)=t(t-n)$. 则 $f(A)=O$.

情形 1: $\mu_S = t$. $S = O = J_S$.

情形 2: $\mu_S = t - n$. $S = nE_n = J_S$.

情形 3: $\mu_S = t(t-n)$. 因为 $n \neq 0$, 所以 S 可对角化(判别法V). 于是

$$J_S = \begin{pmatrix} nE_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \mathrm{rank}(S)$. 当

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

时, 有

$$J_S = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

关于 $\mathbb{C}$ 上 Jordan 标准型尚不知道的秘密:

(i) 唯一性是否成立?

(ii) 关于特征值 λ 的 Jordan 块有多少个, 每个的阶是多少?