

第三章 内积空间

1 欧式空间

约定: 在本节中 V 是实数域 \mathbb{R} 上的有限维线性空间.

1.1 V 上的内积

定义 1.1 设 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是 V 上的双线性型满足 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ 是正定的. 则称 (V, f) 是一个欧式空间, f 是 V 上的内积.

例 1.2 (标准欧式空间) 设 $V = \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto \mathbf{x}^t \mathbf{y}. \end{aligned}$$

注意到 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t E \mathbf{y}$. 于是, f 是 \mathbb{R}^n 对称双线性型, 且 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{x}$ 是正定的. 于是, (V, f) 是欧式空间.

例 1.3 设 $V = M_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} f: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \text{tr}(X^t Y). \end{aligned}$$

下面我们来验证 f 是 V 上的内积.

首先设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A, B \in V$,

$$\begin{aligned} f(\alpha A + \beta B, Y) &= \text{tr}((\alpha A + \beta B)^t Y) && (f \text{ 的定义}) \\ &= \text{tr}((\alpha A^t + \beta B^t) Y) && (\text{转置的性质}) \\ &= \text{tr}(\alpha(A^t Y) + \beta(B^t Y)) && (\text{矩阵乘法分配律}) \\ &= \alpha \text{tr}(A^t Y) + \beta \text{tr}(B^t Y) && (\text{tr 是线性函数}) \\ &= \alpha f(A, Y) + \beta f(B, Y) && (f \text{ 的定义}). \end{aligned}$$

于是, f 关于第一个变元是线性的. 类似地可验证 f 关于第二个变元也是线性的. 故 f 是双线性型. 注意到

$$f(Y, X) = \text{tr}(Y^t X) = \text{tr}((Y^t X)^t) = \text{tr}(X^t Y) = f(X, Y).$$

于是, f 是对称的. 设 $X = (x_{i,j}) \neq O$. 则

$$f(X, X) = X^t X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{i,j}^2 > 0.$$

于是, $f(X, X)$ 是正定的. 由此得出 (V, f) 是欧式空间.

例 1.4 设 $V = \mathbb{R}[x]^{(n)}$, $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$.

$$\begin{aligned} \phi: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_a^b f(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

下面我们来验证 ϕ 是 V 上的内积. 首先设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$p, q \in V,$

$$\begin{aligned}\phi(\alpha p + \beta q, g) &= \int_a^b (\alpha p(x) + \beta q(x))g(x)dx \quad (\phi \text{ 的定义}) \\ &= \alpha \int_a^b p(x)g(x)dx + \beta \int_a^b q(x)g(x)dx \quad \left(\int_a^b \text{ 线性}\right) \\ &= \alpha f(p, g) + \beta f(q, g) \quad (f \text{ 的定义}).\end{aligned}$$

于是, ϕ 关于第一个变元是线性的. 类似地可验证 ϕ 关于第二个变元也是线性的. 故 ϕ 是双线性型. ϕ 显然是对称的. 设 $f \in R[x]^{(n)} \setminus \{0\},$

$$\phi(f, f) = \int_a^b f(x)^2 dx > 0.$$

于是, $\phi(f, f)$ 是正定的. 由此得出 (V, ϕ) 是欧式空间.

我们把欧式空间 V 上的内积记为 $(|)$. 即

$$\begin{aligned}(|): V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{y}).\end{aligned}$$

利用上述符号, 内积的基本性质如下:

(i) (双线性)对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}|\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}|\mathbf{z}), \quad (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{z}).$$

(ii) (对称性)对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x}).$$

(iii) (正定性)对任意 $\mathbf{x} \in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{且} \quad (\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

定义 1.5 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. 定义

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) = ((\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j))_{m \times m}.$$

称之为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 的 Gram 矩阵.

由内积的对称性可知 $G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ 是对称的.

命题 1.6 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. 则 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 线性相关当且仅当

$$\text{rank}(G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)) < m.$$

证明. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ 使得

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

上述方程组等价于

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j (\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

由此得出等价条件:

$$(\mathbf{v}_i|\underbrace{\sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{v}_j}_{\mathbf{w}}) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

若 $\text{rank}(G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)) < m$, 则存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得 (1) 成立. (见上学期第二章第三讲推论 4.2). 于是, (2) 成立. 由此得出

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i (\mathbf{v}_i | \mathbf{w}) = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{v}_i | \mathbf{w} \right) = (\mathbf{w} | \mathbf{w}) = 0.$$

故 $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. 从而 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 线性相关.

反之, 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 线性相关. 则存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. 于是, (2) 成立. 那么, (1) 成立. 由此得出 $\text{rank}(G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)) < m$ (上学期第二章第三讲推论 4.2). \square

命题 1.7 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$. 令 $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{v}_m$. 则

$$(\mathbf{w} | \mathbf{w}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}.$$

证明. 利用内积的双线性性得出

$$\begin{aligned} (\mathbf{w} | \mathbf{w}) &= \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{v}_i \mid \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_i \alpha_j (\mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j) \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_m) G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

注解 1.8 由上述两个命题可知, $G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ 是半正定的. 它是正定的当且仅当 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 线性无关.

1.2 长度、距离、角度和正交

定义 1.9 设 V 是欧式空间, $\mathbf{x} \in V$. 称 $\sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$ 是 \mathbf{x} 的长度, 记为 $\|\mathbf{x}\|$. 再设 $\mathbf{y} \in V$. 则 $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ 称为 \mathbf{x} 到 \mathbf{y} 之间的距离.

由内积的正定性可知, $\|\mathbf{x}\|$ 是良定义的且 $\|\mathbf{x}\| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 从而, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 等且仅当 $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$. 由双线性可知 $\|\mathbf{x}\| = \|-\mathbf{x}\|$. 从而, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.

定理 1.10 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则 $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ (*Cauchy-Bunyakovski* 不等式). 特别地, $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 当且仅当 \mathbf{x}, \mathbf{y} 线性相关.

证明. 当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 时定理中的结论显然成立. 设 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ 和 λ 是任意实数. 则 $(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \geq 0$. 利用双线性性和对称性得

$$(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{y})\lambda^2 + 2(\mathbf{x}|\mathbf{y})\lambda + (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0.$$

于是, $\Delta := 4(\mathbf{x}|\mathbf{y})^2 - 4(\mathbf{y}|\mathbf{y})(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \leq 0$. 由此得出

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{y}|\mathbf{y})(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \implies |(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

注意到 $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 当且仅当 $\Delta = 0$ 当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = 0.$$

这结论等价于 $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (内积正定性). 在 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ 的条件下, 上述结论等价于 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 线性相关. \square

例 1.11 在标准欧式空间中, *Cauchy-Bunyakovski* 不等式是对任意 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

在例 1.3 定义的矩阵欧式空间中, *Cauchy-Bunyakovski* 不等式是对任意 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$|\text{tr}(A^t B)| \leq \sqrt{\text{tr}(A^t A)} \sqrt{\text{tr}(B^t B)}.$$

在例 1.4 定义的多项式欧式空间中, *Cauchy-Bunyakovski* 不等式是对任意 $f, g \in \mathbb{R}[x]^{(n)}$,

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx}.$$

设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, 且存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ 或 $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$. 则称 \mathbf{x}, \mathbf{y} 平行. 如果 $\alpha \geq 0$, 则称 \mathbf{x}, \mathbf{y} 同向. 如果 $\alpha \leq 0$, 则称 \mathbf{x}, \mathbf{y} 反向. 有时也称 $\mathbf{0}$ 是迷向的.

推论 1.12 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. 等式成立等且仅当 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 同向.

证明. 我们计算

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{x} + \mathbf{y}) && \text{(长度的定义)} \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) && \text{(双线性和对称性)} \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x} | \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 && \text{(长度的定义)} \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 && \text{(Cauchy-Bunyakovski)} \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.\end{aligned}$$

于是, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

下面验证等式成立的充要条件. 不妨设 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. 由上面计算可知等式成立当且仅当 $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. 根据定理 1.10, 此时存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$. 于是, $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 等价于 $(\alpha\mathbf{y} | \mathbf{y}) = \|\alpha\mathbf{y}\|\|\mathbf{y}\|$, 即 $\alpha\|\mathbf{y}\|^2 = |\alpha|\|\mathbf{y}\|^2$. 换言之, $\alpha = |\alpha|$. 即 \mathbf{x}, \mathbf{y} 同向. \square

设 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 如果 $\|\mathbf{x}\| = 1$, 则称 \mathbf{x} 是单位向量. 设 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 则 $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ 是与 \mathbf{v} 同向的单位向量, 称为 \mathbf{v} 的单位化向量.

定义 1.13 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 称

$$\arccos \left(\frac{(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \right)$$

是 \mathbf{x}, \mathbf{y} 的夹角.

根据 Cauchy-Bunyakovski 不等式, 夹角是良定义的. 它的通常取值范围是 $[0, \pi]$.

定义 1.14 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 如果 $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$, 则称 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 正交, 记为 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

零向量与任何向量都正交.

引理 1.15 设 $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in V$, 其中 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ 非零.

(i) $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ii) 如果 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ 两两正交, 则它们线性无关.

证明. (i) 注意到

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \iff \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(ii) 因为对任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ 满足 $i \neq j$, 我们有 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$, 所以 $G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \text{diag}((\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_1), \dots, (\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_k))$. 因为对任意 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_i) \neq 0$, 所以

$$\text{rank}(G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)) = k.$$

根据命题 1.6, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ 线性无关. \square

例 1.16 (勾股定理) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 证明 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ 当且仅当

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

证明. 因为 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2$, 所以

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

当且仅当 $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$, 即 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. \square