第三章　内积空间

5　正规算子与正规矩阵

5.1　伴随算子

定义 5.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果算子 $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y}))$, 则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

命题 5.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 的伴随算子存在且唯一. 如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A, 则其伴随算子在该基下的矩阵等于 A^t.

证明. 由线性映射基本定理 II (第一章第二讲定理 4.11), 存在线性算子 $\mathcal{B}$ 使得 $\mathcal{B}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)|\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i$,

$j=1,2,\ldots,n$. 设 $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y}=\sum_{j=1}^{n}y_j\mathbf{e}_j$. 则

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y})) &= (\mathbf{x}|\sum_{j=1}^{n}y_j\mathcal{B}(\mathbf{e}_j)) \quad (\mathcal{B}\text{ 线性}) \\
&= (\mathbf{x}|\sum_{j=1}^{n}y_j\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k) \quad (\mathcal{B}\text{ 的定义}) \\
&= (\mathbf{x}|\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}y_j(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|\mathbf{e}_j)\right)\mathbf{e}_k) \quad (\text{和号互换}) \\
&= (\mathbf{x}|\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|y_j\mathbf{e}_j)\right)\mathbf{e}_k) \quad (\text{内积双线性}) \\
&= (\mathbf{x}|\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|\sum_{j=1}^{n}y_j\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k) \quad (\text{内积双线性}) \\
&= (\mathbf{x}|\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|\mathbf{y})\mathbf{e}_k) \quad (\mathbf{y}\text{ 的定义}) \\
&= (\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i|\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|\mathbf{y})\mathbf{e}_k) \quad (\mathbf{x}\text{ 的定义}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i(\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)|\mathbf{y})) \quad (\text{单位正交基下的内积公式}) \\
&= (\sum_{i=1}^{n}x_i\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)|\mathbf{y}) \quad (\text{内积双线性}) \\
&= (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) \quad (\mathcal{A}\text{ 线性}).
\end{aligned}
$$

于是, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子. 存在性成立.

设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的另一个伴随算子. 则对于任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$,

$(\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}|\mathcal{C}(\mathbf{y}))$. 于是

$$(\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y}) - \mathcal{C}(\mathbf{y})) = 0.$$

取 $\mathbf{x} = \mathcal{B}(\mathbf{y}) - \mathcal{C}(\mathbf{y})$. 我们有 $(\mathcal{B}(\mathbf{y}) - \mathcal{C}(\mathbf{y})|\mathcal{B}(\mathbf{y}) - \mathcal{C}(\mathbf{y})) = 0$. 于是, $\mathcal{B}(\mathbf{y}) = \mathcal{C}(\mathbf{y})$. 由 $\mathbf{y}$ 的任意性可知唯一性成立.

设 $A = (a_{i,j})$. 则

$$\mathcal{B}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\mathbf{e}_k|\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\mathbf{e}_i.$$

于是, $\mathcal{B}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是 $(a_{j,i}) = A^t$. □

根据上述命题, 我们把 $\mathcal{A}$ 的伴随算子记为 $\mathcal{A}^*$.

5.2 正规算子

定义 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是正规算子. 类似地, 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果 $AA^t = A^tA$, 则称 A 是正规矩阵.

例 5.4 证明正交矩阵是正规矩阵.

证明. 设 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 则 $P^tP = E = PP^t$. 故 P 是正规矩阵. □

命题 5.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ 正规当且仅当 A 正规.

证明. 根据命题 5.2, $\mathcal{A}^*$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A^t. 由第二章第一讲定理 2.1, $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ 和 $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵分别是 AA^t 和 A^tA. 有矩阵表示的唯一性可知(见第二章第一讲第 1.1 节), $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 当且仅当 $AA^t=A^tA$. □

定义 5.6 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是对称算子. 如果 $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是斜对称算子.

对称和斜对称算子都是正规算子. 显然, 对称和斜对称矩阵都是正规矩阵.

命题 5.7 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ (斜)对称算子当且仅当 A (斜)对称矩阵.

证明. 根据命题 5.2, A^* 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A^t. 于是, $\mathcal{A}^*$=$\mathcal{A}$ 当且仅当 A^t=A; $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$ 当且仅当 $A^t=-A$; □

定义 5.8 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果对于任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{A}$ 是保内(积)的.

命题 5.9 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则下列断言等价

(i) $\mathcal{A}$ *保内;*

(ii) $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*;*

(iii) 对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$ *(保长);*

(iv) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|$ *(保距).*

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\delta_{i,j} = (\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = ((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{A}^{(i)}|(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{A}^{(j)}) = (\vec{A}^{(i)})^t \vec{A}^{(j)}.$$

于是, $A^t A = E$. 即 $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. 我们计算

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{x})) &= ((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} |(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) \\
&= (x_1, \ldots, x_n)A^t A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x_1^2 + \cdots + x_n^2.
\end{aligned}$$

于是, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\| \Rightarrow (\mathbf{x}-\mathbf{y}|\mathbf{x}-\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})).$$

于是,

$$\|\mathbf{x}\|^2-2(\mathbf{x}|\mathbf{y})+\|\mathbf{y}\|^2=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2-2(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y}))+\|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2.$$

注意到 $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{0}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{0})\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2$. 同理 $\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2$. 由上式可得 $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y}))$. □

注解 5.10 *因为正交矩阵是正规矩阵(见例 5.4), 所以保内算子是正规算子. 它也称为正交(保长、保距)算子.*

5.3 关于正规算子的不可分子空间分解

引理 5.11 *设 n 阶实方阵*

$$A=\begin{pmatrix} B & C \\ O_{(n-k)\times k} & D \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } B\in \mathrm{M}_k(\mathbb{R}).$$

如果 A 正规, 则 $C=O_{k\times(n-k)}$.

证明. 因为 $A^tA=AA^t$, 所以

$$\begin{pmatrix} B^t & O \\ C^t & D^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^t & O \\ C^t & D^t \end{pmatrix}.$$

于是, $B^tB=BB^t+CC^t$. 由此得出, $CC^t=O$. 由第一章第六讲引理 9.15 可知, $C=O_{k\times(n-k)}$. □

引理 5.12 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是正规算子, $W \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则

(i) $W^{\perp}$ *是* $\mathcal{A}$*-子空间;*

(ii) $\mathcal{A}$ *在* W *上的限制算子* $\mathcal{A}_W$ *是正规算子.*

证明. (i) 设 $n = \dim(V)$ 且 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ 是 W 的一组单位正交基. 根据第三章第二讲定理 2.2 (ii), $V = W \oplus W^{\perp}$. 于是, $\dim(W^{\perp}) = n - k$. 设 $\epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n$ 是 $W^{\perp}$ 的一组单位正交基. 则 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n$ 是 V 的一组单位正交基. 因为 W 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以 $\mathcal{A}$ 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵等于

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

其中 $B \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$. 因为 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n$ 是单位正交基且 $\mathcal{A}$ 是正规算子, 所以 A 正规 (第三章第二讲命题 5.4). 根据引理 5.11, $C = O_{k \times (n-k)}$. 于是,

$$(\mathcal{A}(\epsilon_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(\epsilon_n)) = (\epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n) D.$$

故 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$-不变的.

(ii) 由 (i) 的证明可知,

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

因为 $AA^t = A^tA$, 所以 $BB^t = B^tB$. 由此得出 B 是正规矩阵. 而 B 是 $\mathcal{A}_W$ 在单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ 下的矩阵. 根据第三章第二讲命题 4.4, $\mathcal{A}_W$ 正规. □

引理 5.13 *设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则 V 有一维或二维的 $\mathcal{A}$ 子空间.*

证明. 因为 $\mathbb{R}[t]$ 中的非平凡不可约多项式的次数都不大于 2 (第一学期第五章第三讲推论 4.10), 所以 $\mu_{\mathcal{A}} = pq$, 其中 $p, q \in \mathbb{R}[t]$, $0 < \deg(p) \leq 2$, p 在 $\mathbb{R}[t]$ 中不可约. 因为 $\deg(q) < \deg(\mu_{\mathcal{A}})$, 所以 $q(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$. 于是, 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{w} := q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. 设 $W = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$. 则 $\dim(W) > 0$. 因为

$$p(\mathcal{A})(\mathbf{w}) = p(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mu_{\mathcal{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

所以 $\deg(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}) \leq 2$. 从而 $\dim(W) \leq 2$ (第二章第四讲命题 9.2 (iii)). □

注解 5.14 *上述引理只需 V 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间即可(见柯斯特利金书 64 页定理 7).*

定理 5.15 *设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规, $n = \dim(V)$. 则*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus U_{2s+1} \oplus \cdots \oplus U_n,$$

其中

(i) $U_1, \ldots, U_s$ 是二维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(ii) $U_{2s+1}, \ldots, U_n$ *是一维* $\mathcal{A}$*-不可分子空间;*

(iii) $U_1, \ldots, U_s, U_{2s+1}, \ldots, U_n$ *两两正交.*

证明. 对 $\dim(V)$ 归纳. 当 $\dim(V) = 1$ 时, 设 $s = 0$, $U_1 = V$ 即可. 设 $1 \leq \dim(V) < n$ 时定理成立. 由引理 5.13, 存在 $\mathcal{A}$-子空间 U 使得 $0 < \dim(U) \leq 2$. 如果 $\dim(U) = 1$, 则 U-是 $\mathcal{A}$-不可分的. 如果 $\dim(U) = 2$ 但 U 是 $\mathcal{A}$-可分的, 则 U 中有一维 $\mathcal{A}$ 不变子空间. 于是, 不妨设 U 是 V 中维数不超过 2 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间.

根据引理 5.12, $V = U \oplus U^{\perp}$ 且 $\mathcal{A}_{U^{\perp}}$ 是 $U^{\perp}$ 上的正规算子. 根据归纳假设, $U^{\perp}$ 是两两正交的维数不大于 2 的 $\mathcal{A}_{U^{\perp}}$-不变子空间之和. 又因为 U 与 $U^{\perp}$ 中的任何子空间都正交, 所以定理成立. □

5.4 正规矩阵的标准型

设 $\dim(V)=1$ 且任意的 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 都是正规算子. 这是因为对 V 中的单位向量 $\mathbf{v}$, $\mathcal{A}(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$, 其中 λ 是某个实数.

引理 5.16 *设* $\dim(V) = 2$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ *正规, 且* V *是* $\mathcal{A}$*-不可分的. 则* $\mathcal{A}$ *在* V *的任意单位正交基下的矩阵是*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *且* $\beta \neq 0$.

证明. 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 V 的一组单位正交基, A 是 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 下的矩阵. 则 A 正规. 设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

由 $A^t A = A A^t$ 得

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

于是,

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = ac + bd \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c^2 = b^2 \\ ab + cd = ac + bd \end{cases}$$

情形 1. $b = c$. 则 $\chi_A = t^2 - (a+d)t + ad - b^2$. 其判别式是 $(a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$. 故 $\mathcal{A}$ 有实特征根 λ. 设 $\mathbf{v}$ 是 λ 的一个特征向量. 则 $\langle \mathbf{v} \rangle$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 于是, $V = \langle \mathbf{v} \rangle \oplus \langle \mathbf{v} \rangle^\perp$. 根据引理 5.12, V 是 $\mathcal{A}$-可分的, 矛盾.

情形 2. $b = -c$ 且 $c \neq 0$. 则 $a = d$. 故

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

直接验证可得 A 是正规的. □

我们把矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

记为 $N(\alpha,\beta)$, 其中 $\beta \neq 0$.

例 5.17 证明: $N(\alpha,\beta) \sim_o N(a,b) \iff \alpha = a, \beta = \pm b$.

证明: 设 $N(\alpha,\beta) \sim_o N(a,b)$. 则 $\operatorname{tr}(N(\alpha,\beta)) = \operatorname{tr}(N(a,b))$. 于是, $2a = 2\alpha \implies a = \alpha$. 又因为 $\det(N(\alpha,\beta)) = \det(N(a,b))$, 所以 $\alpha^2+\beta^2 = a^2+b^2$. 故 $\beta^2 = b^2$.

反之, 设 $\alpha = a, \beta = \pm b$. 我们只需考虑 $\beta = -b$ 的情形. 此时, 我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \sim_o \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad \square$$

定理 5.18 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规. 则存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s$, $\lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, 其中

$\beta_1 \cdots \beta_s \neq 0$, 使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵等于

$$\begin{pmatrix} N(\alpha_1, \beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s, \beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

证明. 根据定理 5.15,

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus U_{2s+1} \oplus \cdots \oplus U_n,$$

其中

(i) $U_1, \ldots, U_s$ 是二维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(ii) $U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 是一维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(iii) $U_1, \ldots, U_s, U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 两两正交.

设 $\mathbf{e}_{2i-1}, \mathbf{e}_{2i}$ 是 U_i 的单位正交基, $i = 1, 2, \ldots, s$, $\mathbf{e}_j$ 是 U_j 中的单位向量, $j = 2s+1, \ldots, n$. 根据引理 5.16, 存在 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \neq 0$, 使得正规算子 $\mathcal{A}_{U_i}$ 在 $\mathbf{e}_{2i-1}, \mathbf{e}_{2i}$ 下的矩阵是 $N(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 对于一维不变子空间 U_j, 存在 $\lambda_j \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_j) = \lambda_j \mathbf{e}_j, \quad j = 2s+1, \ldots, n.$$

因为 $U_1,\ldots,U_s,U_{2s+1},\ldots,U_n$ 两两正交, 所以

$$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_{2s-1},\mathbf{e}_{2s},\mathbf{e}_{2s+1},\ldots,\mathbf{e}_n$$

是 V 的一组单位正交基, 且 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵如定理所述. □

推论 5.19 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 正规. 则存在 $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s,\lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, 其中 $\beta_1\cdots\beta_s\neq 0$, 使得

$$A\sim_o B=\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

证明. 设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 由公式 $\mathcal{A}(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ 给出, 其中 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t$. 把 $\mathbb{R}^n$ 看成标准欧式空间, 则标准基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是单位正交基且 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵等于 A. 因为 A 正规, 所以 $\mathcal{A}$ 正规(第三章第二讲命题 4.4). 根据定理 5.18, $\mathcal{A}$ 在某组单位正交基下的矩阵是 B. 故 $A\sim_o B$. □

命题 5.20 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 则 $V^{\lambda_1}\perp V^{\lambda_2}$.

证明. 根据定理 5.18, V 中有一组单位正交基 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 使得 $\mathcal{A}$ 在该基底下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \rho_1 E_{k_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \rho_\ell E_{k_\ell} \end{pmatrix},$$

其中 $\rho_1,\ldots,\rho_\ell\in\mathbb{R}$ 两两不同. 于是, $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})=\{\rho_1,\ldots,\rho_\ell\}$. 由此可知, $\mathrm{rank}(\rho_i E_n-B)=n-k_i$. 故 $\dim(V^{\rho_i})=k_i$. 注意到 $\epsilon_{2s+k_1+\cdots+k_{i-1}+1},\ldots,\epsilon_{2s+k_1+\cdots+k_{i-1}+k_i}\in V^{\rho_i}$. 我们有

$$V^{\rho_i}=\langle\epsilon_{2s+k_1+\cdots+k_{i-1}+1},\ldots,\epsilon_{2s+k_1+\cdots+k_{i-1}+k_i}\rangle,\quad i=1,2,\ldots,\ell.$$

于是, 不同特征值对应的特征子空间由单位正交基 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 中不同的元素生成. 故特征子空间 $V^{\rho_1},\ldots,V^{\rho_\ell}$ 两两正交. □

6 对称算子和对称矩阵

6.1 实对称矩阵的正交标准型

定理 6.1 *(i)* 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 对称. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$

不必两两不同.

(ii) 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 $A \sim_o \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 不必两两不同.

(iii) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 $\mathcal{A}$ *(A)* 的特征根. 特别地, 实对称矩阵和欧式空间上的对称算子的特征根都是实数.

证明. (i) 由定理 5.18 可知, 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} N(\alpha_1, \beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s, \beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_s, \beta_s$, $\lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \cdots \beta_s \neq 0$. 因为 $\mathcal{A}$ 是对称算子, 所以 B 是对称矩阵(第三章第二讲命题 4.7). 设 $s > 0$. 则 $N(\alpha_1, \beta_1)$ 是对称矩阵. 由此可知, $\beta_1 = 0$. 矛盾. 故 $s = 0$.

(ii) 把 A 看成标准欧式空间中 $\mathbb{R}^n$ 上的对称算子即可.

(iii) 因为 $A \sim_o \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 所以 $A \sim_s \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 因为特征多项式是相似不变量(见第二章第三讲第五页), $\chi_A = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$. □

问题.

(i) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称. 求 V 的某组单位正交基使得 $\mathcal{A}$ 在下的矩阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

(ii) 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 求 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

基本步骤.

1. 计算 $\mathcal{A}$ 的特征根. 设互不相同的特征根是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$;
2. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, 求 V^{λ_i} 的一组基;
3. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, 利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_i} 的一组单位正交基; $\mathbf{e}_{i,1}, \ldots, \mathbf{e}_{i,d_i}$
4. 根据命题 5.20 和对角化判别法II, $\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{1,d_1}$, $\ldots$, $\mathbf{e}_{k,1}, \ldots, \mathbf{e}_{k,d_k}$ 是 V 的一组单位正交基且在该基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵是对角的.

对于对称矩阵, 只需把它看成标准欧式空间上的线性算子即可.

例 6.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_4(\mathbb{R}).$$

计算 $P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ 和对角阵 B 使得 $B = P^{-1}AP$.

解. 由计算机计算得 $\chi_A(t) = (t-1)^3(t+3)$. 于是, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. 计算 V^{λ_1} 的一组基. 已知 $\dim(V^{\lambda_1}) = 3$. 于是, $\mathrm{rank}(\lambda_1 E - A) = 1$. 我们只要考虑方程

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

的解空间即可. 直接得出

$$V^{\lambda_1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

计算 V^{λ_2} 的一组基. 因为 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$ 且 $\mathbb{R}^4 = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$, 所以 $V^{\lambda_2} = V^{\lambda_1})^{\perp}$. 由此可知,

$$V^{\lambda_2} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_1} 的一组单位正交基得

$\epsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^t, \quad \epsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^t, \quad \epsilon_3 = \dfrac{1}{2}(1,-1,1,-1)^t.$

利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_2} 的一组单位正交基得:

$\epsilon_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^t$. 故

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

我们得到 $P^tAP = \mathrm{diag}(1,1,1,-3)$. □

推论 6.3 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 A 的正*(*负*)*惯性指数等于 A 中正*(*负*)*根的个数*(*在记重数的意义下*)*. 特别地, A *(*半*)*正定当且仅当 A 的特征根都是正的*(*非负的*)*.

证明. 由定理 6.1 (ii) 和 (iii), $A \sim_o \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 因为 $A \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 所以 A 的签名与 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 的签名相同. □

推论 6.4 设 q 是 V 上的二次型. 则 q 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A. 则 q 在某组单位正交基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下可写成

$$g(\mathbf{v}) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\mathbf{v} = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_n\epsilon_n$, $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

证明. 由定理 6.1 (ii) 和 (iii), 存在 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t A P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

且 $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. 考虑基变换

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P.$$

则 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是单位正交基(第三章第二讲命题 3.5). 设

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_n\epsilon_n.$$

则

$$\begin{aligned} q(\mathbf{v}) &= (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1, \ldots, x_n)(P^t)^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因为 $(P^t)^{-1} = (P^{-1})^t$ 和第一章第三讲定理 5,2, 我们有

$$q(\mathbf{v}) = (y_1, \ldots, y_n)\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \quad \square$$

注解 6.5 利用上述推论中的符号, 再设 V 是标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 且 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是标准基. 则 $\epsilon_j = \vec{P}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

同时 $\vec{P}^{(j)}$ 是 A 的特征向量. 于是, A 的特征向量对应着二次型 q 的对称轴.