第三章　内积空间

定理 6.6 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 A 正定. 则存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tAP = E$ 和 P^tBP 是对角阵.

证明. 因为 A 正定, 所以存在 $P_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P_1^tAP_1 = E$ (惯性定理). 令 $C = P_1^tBP_1$. 则 C 对称. 根据第三章第三讲定理 6.1 (ii), 存在 $P_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 使得 $D = P_2^tCP_2$ 是对角阵. 令 $P = P_1P_2$. 则 $P^tBP = P_2^tCP_2 = D$ 且 $P^tAP = P_2^tEP_2 = P_2^tP_2 = E$ ($\because\ P_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$). $\square$

另证. 设 $\mathbb{R}^n$ 的标准基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

对 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t, \mathbf{y} \in (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$. 令对称双线性型

$$f_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^tA\mathbf{y} \quad 和 \quad f_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^tB\mathbf{y}.$$

则把 $\mathbb{R}^n$ 看成欧式空间, 其中 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_A := f_A(\mathbf{x}|\mathbf{y})$. 因为 A 是正定的, 所以上述内积是良定义的. 则存在一组关于内积 $(\,|\,)_A$ 的单位正交基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 使得 f_B 在该基下的矩阵是对角阵. 令

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P,$$

其中 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 注意到 P 一般不是正交矩阵. 这是因为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 一般不是关于 $(\,|\,)_A$ 的单位正交基. 因为 f_B 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵是对角矩阵, 所以 P^tBP 是对角阵. 又

因为 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是关于 $(\,|\,)_A$ 的单位正交基, 所以

$$\delta_{i,j} = (\epsilon_i|\epsilon_j) = f_A(\epsilon_i, \epsilon_j), \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

故 f_A 在 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 下的矩阵是单位阵. 即 $P^tAP = E$. □

例 6.7 *设 A, B 是两个 n 阶正定矩阵. 证明:*

$$\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B).$$

证明. 由上述定理存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tAP = E$ 和 $P^tBP = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. 于是

$$P^tAP + P^tBP = \mathrm{diag}(1 + \alpha_1, \dots, 1 + \alpha_n).$$

两边取行列式得

$$\det(P)^2 \det(A + B) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \alpha_i).$$

而

$$\det(P)^2(\det(A)+\det(B)) = \det(P^tAP)+\det(P^tBP) = 1+\prod_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

因为 B 正定, 所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$. 于是

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + \alpha_i) \geq 1 + \prod_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

由此可知, $\det(P)^2 \det(A+B) \geq \det(P)^2(\det(A)+\det(B)) \implies \det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$. □

定义 6.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称. 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) > 0$. 则称 $\mathcal{A}$ 是正定算子.

命题 6.9 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称. 则 $\mathcal{A}$ 正定当且仅当它在 V 的单位正交基下的矩阵正定.

证明. 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的单位正交基, A 是 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathcal{A}(\mathbf{x})) = (x_1, \ldots x_n)A(x_1, \ldots, x_n)^t.$$

于是, $\mathcal{A}$ 正定当且仅当 A 正定. □

推论 6.10 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称. 则 $\mathcal{A}$ 正定当且仅当它在 $\mathcal{A}$ 的所有特征根都是正实数.

证明. 由第三章第三讲推论 6.3 和上述命题直接可得. □

7 斜对称算子和斜对称矩阵

定理 7.1 *(i)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 斜对称. 则存在 $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

使得 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$M=\begin{pmatrix} N(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) 设 $A\in\mathrm{SSM}_n(\mathbb{R})$. 则 A 正交相似于上述形式的矩阵 M.

(iii) 实斜对称矩阵和欧式空间上的斜对称算子的特征根或者是纯虚数或者等于零.

证明. (i) 由第三章第三讲定理 5.18 可知, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$B=\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s,\ \lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, $\beta_1\cdots\beta_s\neq 0$. 因为 $\mathcal{A}$ 是斜对称算子, 所以 B 是斜对称矩阵(第三章第三讲

命题 5.7). 则 $N(\alpha_i,\beta_i)$ 是斜对称矩阵. 由此可知, $\alpha_i=0$, $i=1,2,\ldots,s$. 同理, $\lambda_{2s+1}=\cdots=\lambda_n=0$.

(ii) 把 A 看成标准欧式空间中 $\mathbb{R}^n$ 上的斜对称算子即可.

(iii) 因为 $A\sim_o M$, 所以 $A\sim_s M$. 故 $\chi_A=\chi_M$. 故

$$\chi_M(t)=(t^2+\beta_1^2)\cdots(t^2+\beta_s^2)t^{n-2s}.$$

于是, $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)\subset\{0,\pm\beta_1\sqrt{-1},\ldots,\pm\beta_s\sqrt{-1}\}$. □

例 7.2 设 $A\in\mathrm{SSM}_n(\mathbb{R})$. 证明 $E+A$ 可逆.

证明. 根据定理 *7.1*, 存在 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tAP=M$, 其中 M 由定理 *7.1* 给出. 于是,

$$P^t(E+A)P=E+M=\begin{pmatrix} N(1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(1,\beta_s) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(E+M)=(1+\beta_1^2)\cdots(1+\beta_s^2)\neq 0$. 所以 $E+A$ 可逆. □

8 正交算子和正交矩阵

定理 8.1 *(i)* 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正交. 则存在 $\theta_1,\ldots,\theta_s\in(0,\pi)\cup$

$(\pi, 2\pi)$ 和 $\lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_n \in \{-1, 1\}$ 使得 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$M = \begin{pmatrix} N(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\cos(\theta_s), \sin(\theta_s)) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(ii) 设 $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 则 A 正交相似于上述形式的矩阵 M.

(iii) 正交矩阵和正交算子的*(*复*)*特征根的复数模长都等于 *1*.

证明. (i) 由第三章第三讲定理 5.18 可知, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} N(\alpha_1, \beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s, \beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_s, \beta_s, \lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \cdots \beta_s \neq 0$. 因为 $\mathcal{A}$ 是正交算子, 所以 B 是正交矩阵(第三章第三讲命题 5.9). 设 $s > 0$. 则 $N(\alpha_i, \beta_i)$ 是正交矩阵且无实特征

根. 故存在 $\theta_i \in (0,\pi)$ 使得 $N(\alpha_i,\beta_i) = N(\cos(\theta_i),\sin(\theta_i))$, $i=1,2,\ldots,s$. 类似, λ_j 是一行一列的正交矩阵. 因为正交矩阵的行列式等于 ± 1, 所以 $\lambda_j \in \{-1,1\}$.

(ii) 把 A 看成标准欧式空间中 $\mathbb{R}^n$ 上的正交算子即可.

(iii) 对任意 $\theta \in (0,\pi)$, $N(\cos(\theta),\sin(\theta))$ 的特征多项式等于 $t^2-2\cos(\theta)t+1$. 其根

$$\lambda = \cos(\theta) \pm \sin(\theta)\sqrt{-1}. \quad \square$$

例 8.2 设 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 满足 $\det(P)=-1$. 证明: $\det(E+P)=0$.

证明. 根据定理 8.1, 存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}PQ=M$, 其中 M 如该定理所述. 因为 $\det(P)=-1$, 所以 $\det(M)=-1$. 于是, 存在 $j\in\{2s+1,\ldots,n\}$ 使得 $\lambda_j=-1$. 我们计算得 $Q^{-1}(E+P)Q=E+M$. 从而, 行列式 $|E+P|$ 等于

$$|N(1+\cos(\theta_1),\sin(\theta_1))|\cdots|N(1+\cos(\theta_s),\sin(\theta_s))|(1+\lambda_{2s+1})\cdots(1+\lambda_n)=0. \quad \square$$

9 正定算子的平方根和极化分解

9.1 谱分解定理

在本小节中, V 是任意域 F 上的线性空间.

引理 9.1 设 $\pi_1,\ldots,\pi_k$ 是 V 上的正交等方组, $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in F$. 则对于任意非负整数 m,

$$(\alpha_1\pi_1+\cdots+\alpha_k\pi_k)^m = \alpha_1^m\phi_1+\cdots+\alpha_k^m\pi_k.$$

证明. 对 m 归纳. 当 $m=0,1$ 时结论显然. 设 $m>1$ 且当 $m-1$ 时结论成立. 则

$$\begin{aligned}(\alpha_1\pi_1+\cdots+\alpha_k\pi_k)^m &= (\alpha_1\pi_1+\cdots+\alpha_k\pi_k^{m-1})(\alpha_1\pi_1+\cdots+\alpha_k\pi_k)\\ &= \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k \alpha_i^{m-1}\alpha_j\pi_i^{m-1}\pi_j\\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i^m\pi_i^m \quad (\text{正交性 } \pi_i\pi_j=\mathcal{O},\, i\neq j)\\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i^m\pi_i. \quad (\text{等方性 } \pi_i^2=\pi). \quad \square\end{aligned}$$

下述定理称为谱分解定理(见科斯特利金第二卷 117 页).

定理 9.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 可对角化. 则

(i) 存在唯一的 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in F$, 两两不同, 和完全正交等方组 $\pi_1,\dots,\pi_k$ 满足

$$\mathcal{A}=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k;$$

(ii) 存在 $f_1,\dots,f_k\in F[t]$ 满足 $f_i(\lambda_j)=\delta_{i,j}$, $\pi_i=f_i(\mathcal{A})$, $i,j\in\{1,2,\dots,k\}$.

证明. (i) 因为 $\mathcal{A}$ 可对角化, 所以

$$V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}, \tag{1}$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 是 $\mathcal{A}$ 的互不相同的特征值. (见对角化判别法II). 设 π_i 是关于上述直和的第 i 个投影, $i = 1, 2, \ldots, k$. 则 $\pi_1, \ldots, \pi_k$ 是完全正交等方组(见第一章第七讲命题12.2). 对任意 $\mathbf{x} \in V$. 由 (1) 可知, 存在

$$\mathbf{x}_1 \in V_1^\lambda, \ldots, \mathbf{x}_k \in V_k^\lambda$$

使得

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k.$$

于是

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \mathcal{A}(\mathbf{x}_k) = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{x}_k.$$

因为 $\pi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, 所以

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda_1 \pi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_k \pi_k(\mathbf{x}) = (\lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_k \pi_k)(\mathbf{x}).$$

由 $\mathbf{x}$ 的任意性可知, $\mathcal{A} = \lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_k \pi_k$. 存在性成立.

再设 $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ 是一个完全正交等方组满足

$$\mathcal{A} = \alpha_1 \sigma_1 + \cdots + \alpha_m \sigma_m,$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$, 两两不同. 根据第一章第七讲命题12.4,

$$V = \operatorname{im}(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{im}(\sigma_m) \tag{2}$$

且 σ_i 是关于该直和的第 i 个投影, $i = 1, 2, \ldots, m$. 设 $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{im}(\sigma_1) \setminus \{\mathbf{0}\}$. 则存在 $\mathbf{y}_1 \in V$ 使得 $\mathbf{x}_1 = \sigma_1(\mathbf{y}_1)$. 于是

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) &= (\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 \cdots + \alpha_m\sigma_m)(\sigma_1(\mathbf{y}_1)) \\ &= \alpha_1\sigma_1^2(\mathbf{y}_1) + \alpha_2\sigma_2\sigma_1(\mathbf{y}_1) + \cdots + \alpha_m\sigma_m\sigma_1(\mathbf{y}_1) \\ &= \alpha_1\sigma_1(\mathbf{y}_1) \quad (\text{正交等方}) \\ &= \alpha_1\mathbf{x}_1.\end{aligned}$$

于是, α_1 是 $\mathcal{A}$ 的特征值 且 $\mathbf{x}_1 \in V^{\alpha_1}$. 但 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 是 $\mathcal{A}$ 全部的特征值. 故不妨设 $\alpha_1 = \lambda_1$. 由此得出 $\mathrm{im}(\sigma_1) \subset V^{\lambda_1}$. 类似地, 适当调整下标后我们可证 $\alpha_i = \lambda_i$ 且 $\mathrm{im}(\sigma_i) \subset V^{\lambda_i}$, $i = 2, 3, \ldots, m$. 特别地, $m \leq k$. 由 (1), (2) 和上述包含关系得出

$$\begin{array}{ccccccccccc} V & = & V^{\lambda_1} & \oplus & \cdots & \oplus & V^{\lambda_m} & \oplus & \cdots & \oplus & V^{\lambda_k} \\ & & \bigcup & & \cdots & & \bigcup & & & & \\ V & = & \mathrm{im}(\sigma_1) & \oplus & \cdots & \oplus & \mathrm{im}(\sigma_m) & & & & \end{array}.$$

由此得出 $k = m$. 即

$$\begin{array}{ccccccc} V & = & V^{\lambda_1} & \oplus & \cdots & \oplus & V^{\lambda_k} \\ & & \bigcup & & \cdots & & \bigcup \\ V & = & \mathrm{im}(\sigma_1) & \oplus & \cdots & \oplus & \mathrm{im}(\sigma_k) \end{array}. \tag{3}$$

根据第一章第二讲命题 4.16, 我们有

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(V) & = & \dim(V^{\lambda_1}) & + & \cdots & + & \dim(V^{\lambda_k}) \\ & & \bigvee\| & & \cdots & & \bigvee\| \\ \dim(V) & = & \dim(\mathrm{im}(\sigma_1)) & + & \cdots & + & \dim(\mathrm{im}(\sigma_k)) \end{array}.$$

于是,

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(V) & = & \dim(V^{\lambda_1}) & + & \cdots & + & \dim(V^{\lambda_k}) \\ & & \| & & \cdots & & \| \\ \dim(V) & = & \dim(\mathrm{im}(\sigma_1)) & + & \cdots & + & \dim(\mathrm{im}(\sigma_k)) \end{array}.$$

由 (3) 得出

$$\begin{array}{ccccccc} V & = & V^{\lambda_1} & \oplus & \cdots & \oplus & V^{\lambda_k} \\ & & \| & & \cdots & & \| \\ V & = & \mathrm{im}(\sigma_1) & \oplus & \cdots & \oplus & \mathrm{im}(\sigma_k) \end{array}.$$

我们证明了 $k = m, \alpha_i = \lambda_i$, $\sigma_i = \pi_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 唯一性成立.

(ii) 对 $i = 1, 2, \ldots, k$, 设

$$f_i(t) = \frac{(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_{i-1})(t-\lambda_{i+1})\cdots(t-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_k)} \in F[t].$$

则 $f_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. 设

$$g(t) = g_d t^d + \cdots + g_1 t + g_0 \in F[t],$$

其中 $g_0, g_1, \ldots, g_d \in F$.

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{A}) &= \sum_{i=0}^{d} g_i \mathcal{A}^i \\
&= \sum_{i=0}^{d} g_i (\lambda_1 \pi_1 + \cdots \lambda_k \pi_k)^i \\
&= \sum_{i=0}^{d} g_i (\lambda_1^i \pi_1 + \cdots + \lambda_k^i \pi_k) \quad (\text{引理 } 9.1) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{d} g_i \lambda_1^i\right) \pi_1 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{d} g_i \lambda_k^i\right) \pi_k \\
&= g(\lambda_1)\pi_1 + \cdots + g(\lambda_k)\pi_k.
\end{aligned}$$

特别地, 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$f_i(\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{f_i(\lambda_j)}_{\delta_{i,j}} \pi_j = \pi_i. \quad \square$$

注解 9.3 由上述定理可知, π_i 和与 $\mathcal{A}$ 交换的线性算子都是交换的.

9.2 平方根定理

定理 9.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是半正定算子. 则存在唯一的半正定算子 $\mathcal{B}$ 使得 $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{B} \in \mathbb{R}[\mathcal{A}]$.

证明. 因为 $\mathcal{A}$ 是半正定的, 所以它是对称的. 由第三章第

三讲定理 6.1, $\mathcal{A}$ 可对角化. 根据谱分解定理

$$\mathcal{A} = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_k\pi_k,$$

其中, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 是 $\mathcal{A}$ 的所有两两不同的特征根, $\pi_1, \ldots, \pi_k$ 分别是 V 到 $V^{\lambda_1}, \ldots, V^{\lambda_k}$ 关于特征子空间直和分解的投影. 因为 $V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k}$, 所以 $\pi_1, \ldots, \pi_k$ 是完全正交等方组. 因为 $\mathcal{A}$ 半正定, 所以 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 都是非负的(见第三章第三讲推论 6.11). 令 $\mathcal{B} = \sqrt{\lambda_1}\pi_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k}\pi_k$. 根据引理 9.1,

$$\mathcal{B}^2 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\pi_i = \mathcal{A}.$$

下面验证 $\mathcal{B}$ 是半正定算子. 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, 设 $\mathbf{v}_i \in V^{\lambda_i}$. 则

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}_i) = \sqrt{\lambda_1}\pi_1(\mathbf{v}_i) + \cdots + \sqrt{\lambda_k}\pi_k(\mathbf{v}_i) = \sqrt{\lambda_i}\mathbf{v}_i. \tag{4}$$

设 B_i 是 V_i^{λ} 的一组单位正交基. 由第三章第三讲命题 5.1, $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ 是 V 的单位正交基. 根据 (4), $\mathcal{B}$ 在该基下的矩阵是

$$\mathrm{diag}(\underbrace{\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_1}}_{\dim(V^{\lambda_1})}, \ldots, \underbrace{\sqrt{\lambda_k}, \ldots, \sqrt{\lambda_k}}_{\dim(V^{\lambda_k})}).$$

根据第三章第三讲定理 6.1 和推论 6.11, $\mathcal{B}$ 是半正定算子.

根据谱分解定理 $\pi_1, \ldots, \pi_k \in \mathbb{R}[\mathcal{A}]$. 于是, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}[\mathcal{A}]$. 存在性成立.

设 $\mathcal{C}$ 是半正定算子满足 $\mathcal{C}^2=\mathcal{A}$. 则 $\mathcal{C}$ 可对角化. 根据谱分解定理, 存在两两不同的非负实数 $\mu_1,\ldots,\mu_\ell$ 和完全正交等方组 $\sigma_1,\ldots,\sigma_\ell$. 使得 $\mathcal{C}=\mu_1\sigma_1+\cdots+\mu_\ell\sigma_\ell$. 于是

$$\mathcal{A}=\mu_1^2\sigma_1+\cdots+\mu_\ell^2\sigma_\ell=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k.$$

由谱分解的唯一性, 我们有, $\ell=k$ 且适当调整下标后 $\mu_i^2=\lambda_i$ 和 $\sigma_i=\pi_i$, $i=1,2,\ldots,k$. 于是, $\mu_i=\sqrt{\lambda_i}$, 从而, $\mathcal{C}=\mathcal{B}$. □.

推论 9.5 设 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 半正定. 则存在唯一的半正定矩阵 B 使得 $A=B^2$ 且 $B\in\mathbb{R}[A]$.

证明. 把 A 看成标准欧式空间上的线性算子即可. □

例 9.6 设 A,B 是 n 阶正定矩阵, $AB=BA$. 证明: AB 是正定.

证明. 首先验证 AB 对称. 我们计算

$$(AB)^t=B^tA^t=BA=AB.$$

验证完毕. 根据推论 *9.5*, 存在正定矩阵 $C\in\mathbb{R}[A]$, $D\in\mathbb{R}[B]$ 使得 $A=C^2$ 和 $B=D^2$. 因为 $AB=BA$, 所以 $\mathbb{R}[A]$ 和 $\mathbb{R}[B]$ 中的任何两个元素乘法交换. 特别地, $CD=DC$. 上述验证蕴含 CD 也是对称的. 我们计算

$$AB=C^2D^2=CCDD=CDCD=(CD)^tCD.$$

于是, AB 正定(第一章第六讲定理 *9.16 (ii)*). □

例 9.7 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 A 正定. 证明: AB 的特征根都是实数.

证明. 由推论 9.5, 存在正定矩阵 C 使得 $A = C^2$. 于是,

$$AB = C^2B = CC^{-1}C^2BCC^{-1} = C(CBC)C^{-1}.$$

于是, $AB \sim_s CBC$. 因为 B, C 是对称矩阵, 所以 CBC 也是对称的(直接验证). 根据第三章第三讲定理 6.1, CBC 的特征根都是实数. 因为 $AB \sim_s CBC$, 所以 AB 的特征根都是实数(特征根是相似不变量). □

9.3 极化分解

定理 9.8 设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 可逆. 则存在唯一的正定矩阵 S 和正交矩阵 T 使得 $A = ST$.

证明. 设 $B = AA^t$. 根据推论 9.5, 存在正定矩阵 S 使得 $B = S^2$. 设 $T = S^{-1}A$. 下面验证 T 正交. 注意到 S 是对称矩阵. 我们有

$$\begin{aligned} T^tT &= (S^{-1}A)^t(S^{-1}A) = A^t(S^{-1})^tS^{-1}A \\ &= A^tS^{-1}S^{-1}A = A^tS^{-2}A = A^tB^{-1}A \\ &= A^t(A^t)^{-1}A^{-1}A = E. \end{aligned}$$

存在性成立.

设 S' 正定, T' 正交使得 $A = S'T' = ST$. 则

$$AA^t = S'T'(S'T')^t = S'T'(T')^t(S')^t = S'(S')^t = (S')^2.$$

推论 9.5 蕴含 $S = S'$, 从而 $T = T'$. □.

注解 9.9 利用矩阵转置, 上述定理也可以叙述为:

设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 可逆. 则存在唯一的正定矩阵 M 和正交矩阵 N 使得 $A = NM$.

注解 9.10 上述定理对不可逆矩阵 A 也部分成立. 此时 S 是半正定矩阵且由 A 唯一确定, 但正交矩阵 T 不一定唯一的.

推论 9.11 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 可逆. 则存在唯一的正定算子 $\mathcal{S}$ 和 正交算子 $\mathcal{T}$ 使得 $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{T}$.

证明. 设 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组单位正交基下的矩阵是 A. 则 A 正定. 于是, 存在唯一的正定矩阵 S 和正交矩阵 T 使得 $A = ST$. 令 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别是 V 上在上述单位正交基下矩阵为 S 和 T 的线性算子. 则 $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{T}$. □

例 9.12 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 是 V 的两组基. 证明: 存在正交变换 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 当且仅当 $(\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j) = (\mathbf{w}_i|\mathbf{w}_j)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

证明. 设正交变换 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 根据第三章第三讲命题 *4.9*,

$$(\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j) = (\mathcal{A}(\mathbf{v}_i)|\mathcal{A}(\mathbf{v}_j)).$$

于是, $(\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j) = (\mathbf{w}_i|\mathbf{w}_j)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

反之, 设 $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基. 则存在 $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n)A \quad \text{和} \quad (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n)B.$$

则

$$(\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j) = (\vec{A}^{(i)})^t \vec{A}^{(j)} \implies \mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = A^t A.$$

同理 $\mathrm{G}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = B^t B$. 由假设条件可知

$$\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \mathrm{G}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n).$$

故

$$A^t A = B^t B. \tag{5}$$

根据定理 *9.8* 和注 *9.9*, 存在正定矩阵 M, N 和正交矩阵 P, Q 使得 $A = PM$ 和 $B = QN$. 于是

$$A^t A = M^t P^t P M = M^t M = M^2.$$

同理 $B^t B = N^2$. 由 (5) 和定理 *9.4*, $M = N$. 于是,

$$P^{-1} A = Q^{-1} B.$$

我们得到
$$B = \underbrace{QP^{-1}}_{T} A. \tag{6}$$
根据第三章第二讲命题 *3.2*, T 是正交矩阵. 设 $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V)$ 是在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下矩阵为 T 的线性算子. 同样的命题蕴含 $\mathcal{T}$ 是正交算子. 对任意 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\mathbf{v}_j) &= \mathcal{T}((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{A}^{(j)}) \\
&= (\mathcal{T}(\mathbf{e}_1), \ldots, \mathcal{T}(\mathbf{e}_n))\vec{A}^{(j)} \\
&= (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)T\vec{A}^{(j)} \\
&\overset{(6)}{=} (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{B}^{(j)} \\
&= \mathbf{w}_j. \quad \square
\end{aligned}$$