第二章　线性算子

14　小结

设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

14.1　基本性质

矩阵表示. 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_n, \ldots, \epsilon_n$ 是 V 的两组基, 且

$$(\epsilon_n, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P, \quad P \in \mathrm{GL}_n(F).$$

如果

$$(\mathcal{A}(\mathbf{e}_1), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{e}_n)) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A$$

和

$$(\mathcal{A}(\mathbf{e}_1), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{e}_n)) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)B,$$

其中 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 则 $B = P^{-1}AP$. 由此引出 $A \sim_s B$.

相似不变量. $\mathrm{rank}(A)$, $\mathrm{tr}(A)$, $\det(A)$, $\mu_A(t)$, $\chi_A(t)$, 特征根. 但特征向量不是相似不变量.

核核分解与核像分解.

(a) 设 $f, p, q \in F[t]$ 满足 $f = pq$ 且 $\gcd(p, q) = 1$. 如果 $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 则

$$\ker(p(\mathcal{A})) \oplus \ker(q(\mathcal{A})) = V \quad 且 \quad p(\mathcal{A})|_{\ker(q(\mathcal{A}))} 可逆.$$

(b) $\ker(\mathcal{A})\oplus\mathrm{im}(\mathcal{A})=V\Longleftrightarrow\mathrm{rank}(\mathcal{A})=\mathrm{rank}(\mathcal{A}^2)\Longleftrightarrow t|\mu_{\mathcal{A}}$ 且 $t^2\nmid\mu_{\mathcal{A}}$.

14.2 极小多项式

基本性质. 设 $f\in F[t]$. 则 $f(\mathcal{A})=\mathcal{O}\Longleftrightarrow\mu_{\mathcal{A}}(t)|f(t)$.

应用.

(a) 对角化判定. $\mathcal{A}$ 可对角化当且仅当

$$\mu_{\mathcal{A}}=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_k),$$

其中 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in F$, 两两不同.

(b) 循环算子判定. $\mathcal{A}$ 是循环算子当且仅当 $\deg(\mu_{\mathcal{A}})=n$.

(c) 确定 Jordan 标准型中最大 Jordan 块的大小.

14.3 不变子空间

设 $U=\langle\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间. 则 $\mathcal{A}$ 在基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d,\mathbf{e}_{d+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵形如:

$$\begin{pmatrix}B&C\\O&D\end{pmatrix},\quad \text{其中 } B\in\mathrm{M}_d(F).$$

进而 $\mu_B|\mu_{\mathcal{A}}$, $\mu_D|\mu_{\mathcal{A}}$, 且 $\chi_A=\chi_B\chi_D$.

设 $U=\langle \mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d\rangle$ 和 $W=\langle \mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_n\rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 不变子空间, 且

$$V=U\oplus W.$$

则 $\mathcal{A}$ 在基底 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 下的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } M\in \mathrm{M}_d(F).$$

进而 $\mu_{\mathcal{A}}=\operatorname{lcm}(\mu_M,\mu_N)$ 且 $\chi_{\mathcal{A}}=\chi_M\chi_N$.

应用. $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$, 其中 U_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的.

14.4 特征向量, 特征值和特征多项式

特征值和特征向量的计算.

基本性质. 设 $\operatorname{spec}_F(\mathcal{A}))=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$, 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ 两两不同. 则 V^{λ_i} 是 $\mathcal{A}$-不变的且 $V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_k}$ 是直和.

应用. 四个可对角化判定法则.

14.5 循环子空间

基本性质. $F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}=\{p(\mathcal{A})(\mathbf{v})\,|\,p\in F[t]\}$.

循环算子的矩阵表示. 设 $\mathcal{A}$ 是循环算子且

$$\mu_{\mathcal{A}}=t^n+f_{n-1}t^{n-1}+\cdots+f_0.$$

则$\mathcal{A}$ 在循环基 $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \ldots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

应用. Hamilton-Cayley 定理的证明. 矩阵相似判定准则 I 的证明.

14.6 空间分解

主要结论.

(a) $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_1 \oplus \cdots \oplus F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_\ell$

(b) $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$, 其中每个 U_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的, 即 U_i 是 $\mathcal{A}_i$-循环的, 且 μ_i 是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的某个不可约因子的幂次, 其中 $\mathcal{A}_i$ 是 $\mathcal{A}$ 在 U_i 上的限制算子 $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$.

应用.

(a) 加强版的 Hamilton-Cayley 定理, 不可分子空间判定法则.

(b) 构造复数域上矩阵的 Jordan 块和标准型.

14.7 复数域上 Jordan 标准型的计算

基本方法.

(a) 对低阶方阵, 利用特征根的几何重数，代数重数和它们在极小多项式中的重数猜 Jordan 标准型;

(b) 一般情形, 利用秩序列计算初等因子组构造 Jordan 标准型.

14.8 矩阵相似的判定

三个判定法则.