第二次习题课

一、作业答案及需要注意的问题

1. (1)

$$L_A=\begin{pmatrix}2&1&-3&5&6\\-3&2&1&-4&5\\-1&3&-2&1&11\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}-1&3&-2&1&11\\-3&2&1&-4&5\\2&1&-3&5&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1\times 2]{r_2+r_1\times(-3)}\begin{pmatrix}-1&3&-2&1&11\\0&-7&7&-7&-28\\0&7&-7&7&28\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2\times 1}\begin{pmatrix}-1&3&-2&1&11\\0&-7&7&-7&-28\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-\frac{1}{7})]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-3&2&-1&-11\\0&1&-1&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2\times 3}\begin{pmatrix}1&0&-1&2&1\\0&1&-1&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=x_3-2x_4+1\\x_2=x_3-x_4+4.\end{cases}$$ x_3, x_4 为自由未知量.

$$Sol(L_A)=\left\{\begin{pmatrix}x_3-2x_4+1\\x_3-x_4+4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\ \middle|\ x_3,x_4\in\mathbb{R}\right\}.$$

(2).

$$\begin{bmatrix}2&-1&5&-3\\1&-5&3&2\\3&-4&7&-1\\9&-7&15&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_3\times(-3)]{(r_1\leftrightarrow r_2)}\begin{pmatrix}1&-5&3&2\\2&-1&5&-3\\3&-4&7&-1\\0&5&-6&7\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-5&3&2\\0&9&-1&-7\\0&11&-2&-7\\0&5&-6&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_4\times(-2)]{r_2+r_4\times(-2)}\begin{pmatrix}1&-5&3&2\\0&-1&11&-21\\0&1&10&-21\\0&5&-6&7\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 11 & -21 \\ 0 & 0 & 21 & -42 \\ 0 & 0 & 49 & -98 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

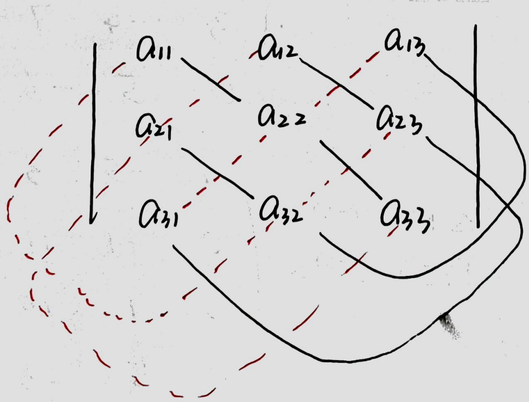
故原齐次线线方程组有非零解。

$$\begin{cases} x_1 = -3x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$ x_4是自由未知量。

$$Sol(L_0) = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_4 \\ x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \ x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



学习了置换后定义一般的行列式。

补充低阶行列式

回顾：给定如下二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ (1).

若系数矩阵的行列式非零，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

则(1)有唯一解 $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$, $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

下面考虑三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \cdots\cdots (2.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \cdots (2) \cdots (2.2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \cdots\cdots (2.3). \end{cases}$$

为求 x_1，希望用消元法从(2)中消去 x_2, x_3.

为此选取 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^3$ s.t. $c_1 \times (2.1) + c_2 \times (2.2) + c_3 \times (2.3)$ 中 x_2, x_3 的系数均为0.

即 $$\begin{cases} a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{32}c_3 = 0 \\ a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + a_{33}c_3 = 0 \end{cases} \quad (3).$$

要找出 c_1, c_2, c_3 满足上式(3). 注意到当 c_1, c_2, c_3 全为0时无意义.

故假设 $c_1 \neq 0$，令 $z_1 = \frac{c_2}{c_1}$，$z_2 = \frac{c_3}{c_1}$，则有

$$\begin{cases} a_{22}z_1 + a_{32}z_2 = -a_{12} \\ a_{23}z_1 + a_{33}z_2 = -a_{13} \end{cases} \quad (4).$$

若 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 则(4)的解为 $z_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} -a_{12} & a_{32} \\ -a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}$, $z_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{23} & -a_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}$.

取 $c_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

$$c_2 = \begin{vmatrix} -a_{12} & a_{32} \\ -a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{23} & -a_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

那么 $c_1 x(2,1)+c_2 x(2,2)+c_3 x(2,3)$ 有如下形式.

$$\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right) x_1$$

$$= b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

上式写成: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 则 $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$.

定理1: 若 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$. 则(2)有唯一解:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 & a_{13} \\ a_{22} & b_2 & a_{23} \\ a_{32} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

3. 证如果X是有限集, 且变换 $f: X \to X$ 是单射, 则f是双射.

证: 我们仅需指出f是满射, 即对任意元素 $x \in X$, 找到 x', s.t. $f(x')=x$.

令 $f^{(k)}(x) = f(f\cdots(f(x))\cdots) = f(f^{k-1}(x))$, $k=0,1,2,\cdots$

由于X有限, 在这一序列中必有重复元. $f^{(m)}(x) = f^{n}(x)$ $m>n$.

若 $n>0$, 由等式 $f(f^{m-1}(x)) = f(f^{n-1}(x))$ 和f的单射 $\Rightarrow f^{m-1}(x) = f^{n-1}(x)$.

… 重复这一步骤.

$$f^{m-n}(x) = f^{0}(x) = e(x) = x.$$

这时取 $x' = f^{m-n-1}(x)$, 则 $f(x') = x$.

注: 有限集合到自身的满变换也是双射.

3. 2).

① $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ 且 ② f 满 $\Longleftrightarrow \forall V \subseteq Y$, $f(f^{-1}(V)) = V$.

证: $\forall y \in f(f^{-1}(V))$ 即 $\exists x \in f^{-1}(V)$ s.t. $y = f(x)$.

$\because x \in f^{-1}(V)$ $\therefore \exists y' \in V$ s.t $f(x) = y'$

又 $\because f$ 为映射. 即 $f(x) = y = y'$ $\therefore y \in V$ $\therefore f(f^{-1}(V)) \subseteq V$.

f 是满射 $\Longleftrightarrow \forall V \subseteq Y$ 满足 $f(f^{-1}(V)) = V$.

"$\Longrightarrow$" 对 $\forall V \subseteq Y$ 由上述证明可知 $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ 下面证反包含关系.

对 $\forall y \in V$ $\because f$ 为满射 $\therefore \exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$.

$\because f(x) = y \in V$ $\therefore x \in f^{-1}(V)$ $\therefore y = f(x) \in f(f^{-1}(V))$ $\therefore V \subseteq f(f^{-1}(V))$

$\therefore f(f^{-1}(V)) = V$.

"$\Longleftarrow$" 假设 f 不是满射. 即 $\exists y \in Y$ s.t. $\forall x \in X$ $f(x) \neq y$

($\forall y \in Y$ $f(f^{-1}(y)) = y \Rightarrow \exists x \in X$
s.t $x = f^{-1}(y) \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow$ 有原像)

令 $V = \{y\}$ 由假设条件 $f^{-1}(V) = \phi$

$\therefore f(f^{-1}(V)) = \phi \neq V$ 矛盾 $\therefore f$ 满. $\square$.

3). ① $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$.

对 $\forall y \in f(S \cup T)$ 则 $\exists x \in S \cup T$ s.t. $f(x) = y$ 且由 $x \in S \cup T$ 可知

$x \in S$ 或 $x \in T$ 若 $x \in S$ 则 $y = f(x) \in f(S) \subseteq f(S) \cup f(T)$.

若 $x \in T$ 则 $y \in f(T) \subseteq f(S) \cup f(T)$.

$\therefore y \in f(S) \cup f(T)$ $\therefore f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$.

对 $\forall y \in f(S) \cup f(T)$ 即 $y \in f(S)$ 或 $y \in f(T)$.

若 $y \in f(S)$ 即 $\exists x \in S \subseteq S \cup T$ s.t. $y = f(x) \in f(S \cup T)$

若 $y \in f(T)$ 即 $\exists x \in T$ s.t. $y = f(x) \in f(S \cup T)$.

$\therefore y \in f(S \cup T)$ $\therefore f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$ $\therefore f(S) \cup f(T) = f(S \cup T)$.

② $\forall y \in f(S\cap T)$ 即 $\exists x \in S\cap T$ s.t. $y=f(x)$

$\because x \in S\cap T \subseteq S$ 且 $x \in T$.

$\Rightarrow y \in f(S)$ 且 $y \in f(T)$ $\therefore y \in f(S)\cap f(T)$ $\therefore f(S\cap T) \subseteq f(S)\cap f(T)$.

举例：合理即可.

5. 注：一般证集合的相等用左右包含关系。

证：1) $\forall x \in S\Delta T$ 即 $x \in (S\setminus T)\cup(T\setminus S) \Longrightarrow x \in S\setminus T$ 或 $x \in T\setminus S$.

且 $S \subseteq S\cup T$, $T \subseteq S\cup T$ $\therefore x \in (S\cup T)\setminus T$ 或 $x \in (S\cup T)\setminus S$

且 $S\cap T \subseteq S$, $S\cap T \subseteq T$ $\therefore x \in (S\cup T)\setminus(S\cap T)$

$\therefore S\Delta T \subseteq (S\cup T)\setminus(S\cap T)$.

2). $\forall x \in (S\cup T)\setminus(S\cap T)$ 即 $x \in S\cup T$ 且 $x \notin S\cap T$

$\because x \in S\cup T$ $\therefore x \in S$ 或 $x \in T$. 若 $x \in S$ 且 $x \notin S\cap T$ $\therefore x \in S\setminus T$

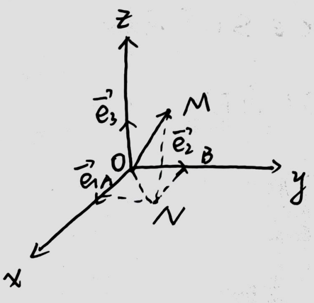
若 $x \in T$ 且 $x \notin S\cap T$ $\therefore x \in T\setminus S$ $\therefore x \in S\setminus T$ 或 $x \in T\setminus S$.

$\therefore x \in (S\setminus T)\cup(T\setminus S)$ $\therefore (S\cup T)\setminus(S\cap T) \subseteq S\Delta T$.

综上. $S\Delta T = (S\cup T)\setminus(S\cap T)$ □.

二. 平面与空间直线

空间直角坐标系：过空间一点O，由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个直角坐标系.



O：坐标原点

坐标轴：x, y, z 轴　单位向量：$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$

坐标面：xOy, xOz, yOz

$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{ON} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$

↓

$\vec{r} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = (x, y, z)$.

空间中一点 $\xleftrightarrow{1-1}$ 有序数组 (x, y, z) $\xleftrightarrow{1-1}$ 向量 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

(x_i, y_i, z_i) $\qquad$ $\vec{r_i}$ $(i = 1, 2)$

加法: $(x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$ $\qquad$ $\vec{r_1} \pm \vec{r_2}$

数乘: $(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ $\qquad$ $\lambda \vec{r_1}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

$(x_2, y_2, z_2) = \lambda (x_1, y_1, z_1)$ $\qquad$ $\vec{r_1} \parallel \vec{r_2}$ $(\vec{r_1} \neq \vec{0})$.

引理1: 假设 $\vec{r_1}$ 与 $\vec{r_2}$ 不共线, 则 $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$ 共面 $\Longleftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

证明: "$\Longrightarrow$" 由 $\vec{r_1} \nparallel \vec{r_2}$ 且 $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$ 共面, 故 $\exists\ \lambda, \mu$ s.t. $\vec{r_3} = \lambda \vec{r_1} + \mu \vec{r_2}$.

故 $\begin{cases} \lambda x_1 + \mu x_2 - x_3 = 0 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 - y_3 = 0 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 - z_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ 即方程组 $\begin{cases} x_1 \lambda + x_2 \mu + x_3 w = 0 \\ y_1 \lambda + y_2 \mu + y_3 w = 0 \\ z_1 \lambda + z_2 \mu + z_3 w = 0 \end{cases}$ $(*)$.

有非零解 $(\lambda, \mu, -1)$ 故 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

"$\Longleftarrow$" 若 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$ 故 $(*)$ 有非零解 (λ_0, μ_0, w_0).

$\Downarrow$ $\qquad$ ($w_0 \neq 0$ 反证: 若 $w_0 = 0$ 则 $\vec{r_1} \parallel \vec{r_2}$, 矛盾)

$\left(-\frac{\lambda_0}{w_0}, -\frac{\mu_0}{w_0}, -1\right)$.

故 $\vec{r_3} = -\frac{\lambda_0}{w_0} \vec{r_1} - \frac{\mu_0}{w_0} \vec{r_2}$

$\therefore \vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$ 共面.

§2.1 平面的方程

确定一个平面的条件:

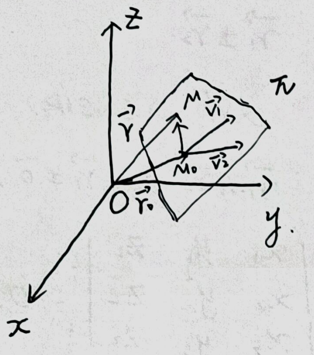
① 已知平面 π 上的一个点 M_0 与平行于该平面的两个不共线向量 $\underbrace{\vec{r_1}, \vec{r_2}}_{\text{方位向量}}$

② 不在一条直线上的三个点 $M_0, M_1, M_2 \in \pi$.

③ 平面上的点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 以及与该平面 π 垂直的向量 $\vec{n}$.

I. 由平面π上一点与方位向量定义的平面方程

假设已选定空间直角坐标系 $\{O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi$, $\vec{v_1}\parallel\pi$, $\vec{v_2}\parallel\pi$ 且 $\vec{v_1}\nparallel\vec{v_2}$.



$M(x,y,z)\in\pi \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M},\ \vec{v_1},\ \vec{v_2}$ 共面

$\Updownarrow$ 由引理1 $\vec{v_1}\nparallel\vec{v_2}$

$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ s.t. $\overrightarrow{M_0M}=\lambda\vec{v_1}+\mu\vec{v_2}$

假设 $\vec{v_1}=(X_1,Y_1,Z_1)$, $\vec{v_2}=(X_2,Y_2,Z_2)$ $\quad\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, $\overrightarrow{OM_0}=\vec{r_0}$ 则

$$\vec{r}=\vec{r_0}+\lambda\vec{v_1}+\mu\vec{r_2} \qquad (1).$$

称(1)为平面π的向量式参数方程, 其中λ, μ为参数.

用坐标表示上式, 则

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda X_1+\mu X_2 \\ y=y_0+\lambda Y_1+\mu Y_2 \\ z=z_0+\lambda Z_1+\mu Z_2 \end{cases} \qquad (2).$$

称(2)为平面π的坐标式参数方程, 其中λ, μ为参数.

另一方面: $\overrightarrow{M_0M},\ \vec{v_1},\ \vec{v_2}$ 共面 $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0.$

故平面π的方程为: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0$

即 $Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$

其中 $A=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$ $\quad B=-\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}$ $\quad C=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$

$D=-(Ax_0+By_0+Cy_0)$

称(3)为π的普通方程.

引理2. $\vec{v}=(r,s,t)\parallel\pi \iff Ar+Bs+Ct=0$.

证明：$\vec{v}\parallel\pi \iff \vec{v},\vec{v_1},\vec{v_2}$ 共面 $\iff \begin{vmatrix} r & s & t \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0 \iff Ar+Bs+Ct=0$ □

定理2. 在$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$中，平面的方程必定是三元一次方程；

反之，任意一个三元一次方程表示一个平面.

下证三元一次方程表示一个平面.

任给一个方程 $A_1x+A_2y+A_3z+A_4=0$ 其中 A_1,A_2,A_3不全为0.

不妨设 $A_1\neq0$ 则 $M_0(-\frac{A_4}{A_1},0,0)$是方程的一个解.

取$\vec{v_1}=(-\frac{A_2}{A_1},1,0)$, $\vec{v_2}=(-\frac{A_3}{A_1},0,1)$ 则由$M_0,\vec{v_1},\vec{v_2}$决定的平面为

$$\begin{vmatrix} x+\frac{A_4}{A_1} & y & z \\ -\frac{A_2}{A_1} & 1 & 0 \\ -\frac{A_3}{A_1} & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad 即\ A_1x+A_2y+A_3z+A_4=0$$

□

特殊情形：平面与x轴，y轴，z轴分别交于点$(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$

其中$abc\neq0$ 则平面π的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.(截距式方程).

§2.2 平面相交理论

首先考虑两个平面的相交情况：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & \cdots\ \pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & \cdots\ \pi_2 \end{cases}$.

则$\pi_1\cap\pi_2$有三种情形：相交、平行、重合.

定理3: 1) π_1与π_2相交$\iff$一次项系数不成比例

2) π_1与π_2平行$\iff$一次项系数成比例但常数项不与这些系数成比例

3) π_1与π_2重合$\iff$所有系数成比例.

(留作思考题证明).

三平面情形:

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1 = 0 \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2 = 0 \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 + D_3 = 0. \end{cases}$$

三平面交于一点 $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$

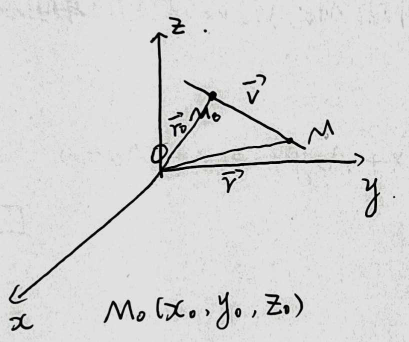
§2.3 直线的方程

确定一条直线l的条件

1) l上的一点与l的方向向量

2) l上的两个点

3) 两个相交平面



$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{v}$ ... l的参数方程

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$M(x, y, z)$

$\vec{v} = (X, Y, Z)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda X \\ y = y_0 + \lambda Y \\ z = z_0 + \lambda Z \end{cases}$$ ... l的坐标式参数方程

消去λ 设$X \neq 0$ 则 $\dfrac{x-x_0}{X} = \dfrac{y-y_0}{Y} = \dfrac{z-z_0}{Z}$ ... l的标准方程(点向式方程)

已知l上两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 方向向量 $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ 故

$M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

... l的两点式方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & \pi_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & \pi_2 \end{cases}$$ ... l的普通方程(一般方程)