循环空间

定义 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$v\in\vec{V}$，若 $V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$，则称 $\mathcal{A}$是V上的循环算子，$\vec{v}$是V中的循环向量，V是关于 $\mathcal{A}$和 $\vec{v}$ 的循环空间.

关于 $F[\mathcal{A}]\cdot v$ 的三条性质

① $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=\{p(\mathcal{A})\cdot\vec{v}\mid p(t)\in F[t]\}$.

② $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的

③ 设 $d=\deg_t(\mu_{\mathcal{A},\vec{v}})$，则 $\underline{\vec{v},\ \mathcal{A}\vec{v},\ \cdots,\ \mathcal{A}^{d-1}\vec{v}}$ 是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 的一组基.

1. $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$，$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$，$v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

计算 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 的一组基.

解: $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\mathcal{A}\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\mathcal{A}^2\vec{v}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$B=(\vec{v},\mathcal{A}\vec{v},\mathcal{A}^2\vec{v})=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$\operatorname{rank}(B)=3$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 的一组基为 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

循环子空间分解

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则存在 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_l\in V\setminus\{0\}$，使得

$$V=(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_1)\oplus\cdots\oplus(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_l).$$

循环空间判定方法.

$\mu_{\mathcal{A}}\mid\chi_{\mathcal{A}}$

$\boxed{\mu_{\mathcal{A}}=\chi_{\mathcal{A}}\Leftrightarrow\deg_t(\mu_{\mathcal{A}})=n}$

① V是 $\mathcal{A}$-循环 $\Leftrightarrow$ $\mu_{\mathcal{A}}=\chi_{\mathcal{A}}$.

② V是 $\mathcal{A}$-循环 $\Leftrightarrow$ $\deg_t(\mu_{\mathcal{A}})=n$，$n=\dim(V)$.

Pf: "$\Rightarrow$" V是 $\mathcal{A}$-循环，$\Rightarrow$ $\mu_{\mathcal{A}}=\chi_{\mathcal{A}}$ $\Rightarrow$ $\deg_t(\mu_{\mathcal{A}})=\deg_t(\chi_{\mathcal{A}})=n$.

"$\Leftarrow$" $\deg_t(\mu_{\mathcal{A}})=n$ $\Rightarrow$ $\exists\ \vec{v}\in V$, s.t. $\deg_t(\mu_{\mathcal{A},\vec{v}})=n$.

$\Rightarrow$ $\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v})=n$.

$\Rightarrow$ $V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$.

[illegible] 则 V是 $\mathcal{A}$-循环 $\Leftrightarrow$ $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 两两不同.

③ A可对角化，即 $A \sim_s \begin{pmatrix} \ddots & \\ & \lambda_n \end{pmatrix}$，则 V是A-循环的 …

(Hamilton - Cayley 定理) $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，则

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \underset{F[t]}{p_1^{l_1}} \cdots p_s^{l_s}$，$l_i \neq 0$

$\mu_{\mathcal{A}}(t) = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$，$0 < m_i \leq l_i$

① $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$，$\mu_{\mathcal{A}}(t) \mid \chi_{\mathcal{A}}(t)$

② $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在$F[t]$中的不可约因子都是$\mu_{\mathcal{A}}(t)$的因子.

2. $A = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_3 \end{pmatrix}$.

$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix}_{n\times n}$，$\mu_{J_n(\alpha)} = (t-\alpha)^n$.

$\mu_{J_2} = t^2$，$\mu_{J_3} = t^3$，$\Rightarrow \mu_A = \mathrm{lcm}(t^2, t^3) = t^3$.

$\deg_t(\mu_A) = 3 \neq \dim(F^5)$

$\Rightarrow F^5$不是 $\mathcal{A}$-循环的.

3. 设 $n = \dim(V)$，$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 证明：如果 $\mathcal{A}^0, \mathcal{A}, \cdots, \mathcal{A}^{n-1}$ 在F上线性无关，则 V是$\mathcal{A}$-循环的.

pf: 设 $\deg_t(\mu_{\mathcal{A}}) = m$，下证 $m = n$.

首先 $m \leq n$ ($\mu_{\mathcal{A}} \mid \chi_{\mathcal{A}}$). 假设 $m < n$，

设$\mu_{\mathcal{A}} = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \cdots + a_0$，$a_{m-1}, \cdots, a_0 \in F$.

$\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^m + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \cdots + a_0\mathcal{A}^0 = \mathcal{O}$

$\Rightarrow \mathcal{A}^m, \mathcal{A}^{m-1}, \cdots, \mathcal{A}^0$ 线性相关

$\Rightarrow A^{n-1},\cdots,A,A^0$ 线性相关 $\to\leftarrow$.

$\Rightarrow m=n$

$\Rightarrow V$是 A-循环的.

4. ① 对角化, (化对角阵)

② Hamilton-cayley 定理 $\chi_A(A)=0$

$A^2+A=0$

$A^2=-A,\ A^3=-A^2=A$

$\cdots$

$A^k=\cdots$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

$\Rightarrow \lambda_1=2,\quad \lambda_2=1.$

$$(\lambda_1E-A)\vec{x}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow V^2=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$(\lambda_2E-A)\vec{x}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow V^1=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

由 $\dim V=\dim V^2+\dim V^1 \Rightarrow A$可对角化. $\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}$

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

$(P|E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E|P^{-1})$

$$A^k=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}^kP^{-1}=\begin{pmatrix}2^k&0&0\\2^k-1&2^k&1-2^k\\2^k-1&0&1\end{pmatrix}$$

5. 设 $A=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in M_n(F)$, 把A看成$F^n$上的线性算子. 证明$F^n$是A-循环

$\Longleftrightarrow \lambda_1,\cdots,\lambda_n$两两不同.

Pf: $\mu_A(t)=lcm(t-\lambda_1,\cdots,t-\lambda_n)$

$\mu_A(t)=\chi_A(t)$

$\Updownarrow$

F^n是A-循环 $\Longleftrightarrow \deg_t(\mu_A(t))=n \Longleftrightarrow \lambda_1,\cdots,\lambda_n$两两不同.

计算一个循环向量 使得 $F^n=F[A]\cdot\vec{v}$.

令 $\vec{v}=\vec{e_1}+\vec{e_2}+\cdots+\vec{e_n}$，其中 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是 F^n 的标准基

$E_n=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})$

$$A\vec{e_j}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\vec{e_j}=\lambda_j\vec{e_j},\ j=1,2,\cdots,n.$$

$\Rightarrow \underline{\forall k\in\mathbb{N}},\quad A^k(\vec{e_j})=\lambda_j^k\vec{e_j},\ j=1,2\cdots n.$

$$A^k\vec{v}=A^k\vec{e_1}+A^k\vec{e_2}+\cdots+A^k\vec{e_n}=\lambda_1^k\vec{e_1}+\cdots+\lambda_n^k\vec{e_n}$$

$$\underbrace{=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}\lambda_1^k\\\vdots\\\lambda_n^k\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow(\vec{v},A\vec{v},\cdots,A^{n-1}\vec{v})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\underbrace{\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\lambda_2^2&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_n&\lambda_n^2&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}}_{\parallel\ P}$$

P 可逆 $\Rightarrow \vec{v},A\vec{v},\cdots,A^{n-1}\vec{v}$ 是 F^n 的一组基.

$\Rightarrow \vec{v}$ 是循环向量.

例 设 D 是 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 上的求导算子，$A=xD$，$B=D^2$. 判断 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是不是 A-循环空间，是不是 B-循环空间，求一个循环向量

解：
$$A\underbrace{(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})}=x(0,1,2x,\cdots,(n-1)x^{n-2})$$
$$=(0,x,2x^2,\cdots,(n-1)x^{n-1})$$
$$\underbrace{=(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\vdots&0&2&&\vdots\\\vdots&\vdots&&\ddots&\\0&0&0&\cdots&n-1\end{pmatrix}}\triangleq A$$

$A=\mathrm{diag}(0,1,2,\cdots,n-2,n-1)$. 对角线上元素两两不同

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 A-循环的.

它的一个循环向量是 $1+x+\cdots+x^{n-1}$

$D^n(f)=0$，$\forall f\in\mathbb{R}[x]^{(n)}$.　　　$B=D^2$.

$B^? = O$ $\begin{cases} B^k = O, & n=2k \Rightarrow B^{\frac{n}{2}} = O \\ B^{k+1} = O, & n=2k+1 \Rightarrow B^{\frac{n+1}{2}} = O \end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{\deg_t(\mu_B) < n}$, $n > 1$.

$\Rightarrow R[x]^{(n)}$ 不是 B-循环

$n=1$, $R[x]^{(1)} = R$, $B^2(R) = \{0\}$.

$R \overset{?}{=} R[B] \cdot \underline{a}$, $a \in R \setminus \{0\}$.

$\forall b \in R$. $\frac{b}{a} \cdot \underset{B^0}{\mathcal{E}} \in R[B]$, $b = \frac{b}{a} \cdot a$.

$\Rightarrow R = R[B] \cdot a$

$\Rightarrow n=1$, R 是 B-循环空间.

6. $A, B \in \mathcal{L}(V)$, A 是循环算子, $AB = BA$. 证明: $B \in F[A]$

Pf: 设 $V = F[A] \cdot \vec{v}$, $n = \dim V$.

$\vec{v}, A(\vec{v}), \cdots, A^{n-1}\vec{v}$ 是 V 的一组基.

$B\vec{v} \in V$, $\exists f \in F[t]$, s.t. $B\underline{\vec{v}} = f(A)\vec{v}$.

下证 $B = f(A)$

$\forall k \in \mathbb{Z}^+$, 我们有

$B(A^k\vec{v}) \overset{\boxed{AB=BA}}{=\!=} A^k(B\vec{v}) = \underline{A}^k f(A)\vec{v} = f(A)(A^k\vec{v})$

$\Rightarrow B$ 与 $f(A)$ 在基底 ① 中每个向量的像相同.

由 线性映射基本定理 II. $\boxed{B = f(A)}$

回顾 设 $A, B \in \mathcal{L}(V)$. 满足 $AB=BA$

① V^λ 是 A 的特征子空间，则 V^λ 是 B 不变的.

② 设 $F=\mathbb{C}$，则 A 和 B 有公共的特征向量.

命题 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $AB=BA$，证明：存在 $R \in GL_n(\mathbb{C})$，使得 $R^{-1}AR$ 和 $R^{-1}BR$ 都是上三角矩阵.

pf: 对 n 归纳. 当 $n=1$ 时 $\checkmark$

设 $n-1$ 时结论成立，看 n 情况.

由 $F=\mathbb{C}$，则 $\exists\ \vec{v}_1 \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$，使得

$$A\vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_1 \text{ 和 } B\vec{v}_1 = \beta \vec{v}_1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

将 $\vec{v}_1$ 扩充成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$.

令 $P = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n) \in GL_n(\mathbb{C})$.

$$\underbrace{P^{-1}AP}_{=A_1} = P^{-1}(A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \cdots, A\vec{v}_n) \qquad P^{-1}P = E_n$$

$$= (\alpha \underbrace{P^{-1}P^{(1)}}_{=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}}, P^{-1}A\vec{v}_2, \cdots, P^{-1}A\vec{v}_n). \qquad \Downarrow \quad P^{-1}P^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & * \\ O_{(n-1)\times 1} & \boxed{A'} \end{pmatrix}，\text{其中 } A' \in M_{n-1}(\mathbb{C})$$

同样地，$\underbrace{P^{-1}BP}_{=B_1} = \begin{pmatrix} \beta & * \\ O_{(n-1)\times 1} & \boxed{B'} \end{pmatrix}$，其中 $B' \in M_{n-1}(\mathbb{C})$.

$$AB=BA \Rightarrow A_1B_1 = B_1A_1 \Rightarrow A'B' = B'A'$$

由归纳假设，$\exists\ Q \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$，s.t. $Q^{-1}A'Q$，$Q^{-1}B'Q$ 同时为上三角矩阵.

令 $R = P\begin{pmatrix} 1 & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & Q \end{pmatrix}$，则 $R^{-1}AR$ 和 $R^{-1}BR$ 为上三角矩阵.

应用 $A,B\in GL_n(\mathbb{C})$. 满足 $AB=BA$ 且 B 幂零. 则 $\chi_A(t)=\chi_{A+B}(t)$

pf: $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$, s.t $S=P^{-1}AP$ 和 $T=P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵

B 幂零 $\Rightarrow \exists m\in\mathbb{N}$, s.t $B^m=0 \Rightarrow T^m=(P^{-1}BP)^m=P^{-1}B^mP=0$

$\Rightarrow T$ 幂零

$$\Rightarrow T=\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} s_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & s_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T+S$ 和 S 的 $\underbrace{\text{主对角线上元素}}_{\text{(特征值)}}$ 一样 $\Rightarrow \chi_{T+S}(t)=\chi_S(t)$

$A\sim_s S$, $S+T=P^{-1}(A+B)P$, $A+B\sim_s S+T$.

$\Rightarrow \chi_{A+B}(t)=\chi_A(t)$ (特征多项式是相似不变量)

引理 设 $A,B\in\mathcal{L}(V)$, $C=AB-BA$, 则要么 $\ker(A)\subset\ker(C)$ 要么 $\operatorname{im}(C)\cap\operatorname{im}(A)$ 非平凡

pf: 若 $\ker(A)\not\subseteq\ker(C)$, 则存在 $\vec{x}\in\ker(A)$, s.t $\underbrace{\vec{y}=C\vec{x}}_{\in\operatorname{im}(C)}\neq\vec{0}$.

$$\vec{y}=C\vec{x}=AB\vec{x}-B\underbrace{A\vec{x}}_{=\vec{0}}=A(B\vec{x})$$

$\Rightarrow y\in\operatorname{im}(A)$

$\Rightarrow y\in\operatorname{im}(C)\cap\operatorname{im}(A)\setminus\{\vec{0}\}$.

$\Rightarrow \operatorname{im}(C)\cap\operatorname{im}(A)\neq\{\vec{0}\}$

定理 设 $\underbrace{\mathbb{F}=\mathbb{C}}$, $A,B\in\mathcal{L}(V)$ 满足 $\operatorname{rank}(AB-BA)\le 1$. 证明 A 和 B 有公共特征向量.

pf: 设 $n=\dim(V)$. 对 n (维数) 作归纳

① $n=1$, $\forall\vec{v}\in V$, $A\vec{v}=\alpha\vec{v}$, $B\vec{v}=\beta\vec{v}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

$\Rightarrow \vec{v}$ 是 A,B 的公共特征向量

② 设 $n>1$ 且 结论对维数小于 n 的空间成立. 下看 n 的情况.

$\boxed{\text{不妨假设 } 0<rank(A)<n}$ 大前提

$rank(A)=0$, $A=O$, $A\vec{v}=0\cdot\vec{v}$, $\vec{v}\in V$. ✓ $A\vec{e_1}=\lambda\vec{e_1}$

$rank(A)=n$, λ 是 A 的一个特征值. $A(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}\lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & *\end{pmatrix}$

存在性依赖于复数域 $\mathbb{C}$

$(A-\lambda E)(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}0 & * & \cdots & * \\ 0 & & & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & *\end{pmatrix}$

$\Rightarrow rank(A-\lambda E)<n$

此时 $rank\big((A-\lambda E)B-B(A-\lambda E)\big)=rank(AB-BA)\le 1$

若 $A-\lambda E$, B 存在公共特征向量 $\vec{v}$, 则 $\vec{v}$ 是 A, B 的公共特征向量.

pf: $(A-\lambda E)\vec{v}=\alpha\vec{v}$, $B\vec{v}=\beta\vec{v}$ $\Rightarrow$ $A\vec{v}=(\alpha+\lambda)\vec{v}$, $B\vec{v}=\beta\vec{v}$.

令 $C=AB-BA$.

case 1 $\quad ker(A)\subseteq ker(C)$.

claim: $ker(A)$ 是 B-不变的.

pf: $\forall\vec{x}\in ker(A)$, $C\vec{x}=\vec{0}$,

$C\vec{x}=AB\vec{x}-BA\vec{x}=A(B\vec{x})$

$\overset{\|}{\vec{0}}$ $\quad\Rightarrow B\vec{x}\in ker(A)$

$\Rightarrow ker(A)$ 是 B 不变的

$C(\underline{\quad\quad})=(\quad)\overbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{m}}^{}$ rank.

$C|_{ker(A)}(\underline{\quad\quad})=(\quad)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{n}$

$n\le m$.

注意 $0<dim(ker(A))<n$.

$(\underbrace{dim(ker(A))}_{\in(0,n)}+\underbrace{rank(A)}_{\in(0,n)}=n$

令 $A'=A|_{ker(A)}$, $B'=B|_{ker(A)}$. $A', B'\in L(ker(A))$

$rank(A'B'-B'A')=rank(AB-BA|_{ker(A)})\le 1$

由归纳假设, A' 和 B' 有公共特征向量, 这个向量是 A 和 B 的公共特征向量.

$A'v=Av$, $v\in ker(A)$

case2 $\ker(A) \not\subseteq \ker(C)$，由引理可知，$im(C) \cap im(A) \neq \{\vec{0}\}$.

$\Rightarrow \dim(im(C)) \leq 1 \Rightarrow im(C) \subseteq im(A)$

claim: $im(A)$ 是 B 不变的，

$\forall \vec{y} \in im(A)$，则 $\exists \vec{x} \in V$，s.t $\vec{y} = A\vec{x}$

$C\vec{x} = (AB-BA)\vec{x} = A(B\vec{x}) - B(A\vec{x}) = A(B\vec{x}) - B\vec{y}$

$\Rightarrow B\vec{y} = A(B\vec{x}) + C\vec{x} \in im A + im(C) \subseteq im(A)$

$\Rightarrow y \in im(A)$

$\Rightarrow im(A)$ 是 B 一不变的.

$\boxed{0 < \dim(im(A)) < n}$

令 $A^- = A|_{im(A)}$, $B^- = B|_{im(A)}$. 则 $rank(AB - BA) \leq 1$

$im(A)$ A 不变的 $A', B' \in \mathcal{L}(im(A))$ $0 < \dim(im(A)) < n$.

由归纳假设 可知，A^- 和 B^- 有公共的特征向量 $\vec{v}$

$\Rightarrow$ 这个向量 是 A 和 B 的公共特征向量.. $A^-\vec{v} = A\vec{v}$, $v \in im(A)$