1. 解:

(i) $(\phi(\vec{e_1}),\phi(\vec{e_2}),\phi(\vec{e_3}))=(\epsilon_1,\epsilon_2)\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}}_{P}$

Thm 设 $\phi\in Hom(V,W)$. 再设 $\vec{e_1}',\cdots,\vec{e_n}'$ 是 V 的另一组基, $\epsilon_1',\cdots,\epsilon_m'$ 是 W 的另一组基, 且 $(\vec{e_1}',\cdots,\vec{e_n}')=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$ 和 $(\epsilon_1',\cdots,\epsilon_m')=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_m)Q$ 其中 $P\in GL_n(F)$ 和 $Q\in GL_m(F)$. 若 ϕ 在 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n};\epsilon_1,\cdots,\epsilon_m$ 下矩阵是 A. 则 ϕ 在 $e_1',\cdots,e_n';\epsilon_1',\cdots,\epsilon_m'$ 下矩阵为 $Q^{-1}AP$.

(ii) $rank(\phi)=2$.

$\forall\vec{x}\in V$, $\exists x_1,x_2,x_3\in F$, s.t $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}$.

$\vec{x}\in ker(\phi)\Leftrightarrow P\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$

$\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&2&-1\end{pmatrix}$ 故 $ker(\phi)$ 的一组基底为 $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$, 从而 $ker(\phi)$ 的基底是 $3\vec{e_1}+\vec{e_2}+2\vec{e_3}$.

(iii) $(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\underbrace{\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&2&0\\0&-1&0\end{pmatrix}}_{A}$, $(\vec{w_1},\vec{w_2})=(\epsilon_1,\epsilon_2)\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}}_{B}$.

由于 A, B 可逆, 则 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ 是 V 的一组基, $\vec{w_1},\vec{w_2}$ 是 W 的一组基.

$$B^{-1}PA=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&2&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&\frac{3}{2}&1\\-1&\frac{5}{2}&0\end{pmatrix}$$

2. 解: (i) $\forall X,Y\in M_n(F)$, $\mathcal{A}(X+Y)=C^{-1}(X+Y)C=C^{-1}XC+C^{-1}YC=\mathcal{A}(X)+\mathcal{A}(Y)$.

$\forall\alpha\in F$, $\mathcal{A}(\alpha X)=C^{-1}(\alpha X)C=\alpha C^{-1}XC$.

$\Rightarrow\mathcal{A}$ 是 $M_n(F)$ 的线性算子.

(ii) $\mathcal{A}(XY)=C^{-1}XYC=C^{-1}XC\,C^{-1}YC=\mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)$

(iii) $\mathcal{B}:M_n(F)\to M_n(F)$

$X\mapsto CXC^{-1}$.

$\forall X\in M_n(F)$ $\mathcal{A}\mathcal{B}(X)=\mathcal{A}(C^{-1}XC)=C(C^{-1}XC)C^{-1}=X$.

$\Rightarrow\mathcal{A}\mathcal{B}=id$.

同理, $\mathcal{B}\mathcal{A}=id$

$\Rightarrow\mathcal{A}$ 为双射, 故 $rank(\mathcal{A})=dim(M_n(F))=n^2$.

3. Pf: $A\sim_s B\Rightarrow\exists P\in M_n(F)$, s.t $B=P^{-1}AP$.

A 幂零, 则 $\exists m\in\mathbb{N}$, s.t. $A^m=0$.

$B^m=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP\cdots\cdots P^{-1}AP=P^{-1}A^mP=0$.

$\Rightarrow$ B 幂零.

利用核与像空间证明矩阵秩的(不)等式

(i) 把矩阵理解为线性映射. 设 $A\in F^{m\times n}$, $\forall \vec{x}\in F^n$, $\vec{x}\mapsto A\vec{x}$

(ii) 利用维数公式 $\dim(\ker(A))+\operatorname{rank}(A)=n$. 把矩阵的秩用核的维数表示

(iii) 考虑核空间之间的包含关系建立线性映射, 利用线性映射基本定理推导出单射.

(iv) 利用单射保持原像空间的维数以及像空间维数公式证明不等式, 并推导单射也是满射时得到等式.

A幂等, 则 $A^2=A$.

$$\Rightarrow B^2=P^{-1}APP^{-1}AP=P^{-1}A^2P=P^{-1}AP=B$$

$\Rightarrow B$幂等.

(ii)

令 $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}&2\\2&\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\2&-2\end{pmatrix}$$

4. Pf. 设$\mathcal{A}$在某组基下的矩阵为A, $\mathcal{A}=\mathcal{A}^3\Rightarrow A=A^3$.

$$\operatorname{rank}(A)\geq\operatorname{rank}(A^2)\geq\operatorname{rank}(A^3)$$
$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^3)$$
$$\Rightarrow\operatorname{rank}(A^2)=\operatorname{rank}(A)$$

由核像分解定理可知, $\ker(\mathcal{A})\oplus\operatorname{im}(\mathcal{A})=V$.

5. Pf. 令 $K_A=\ker(A)$, $K_{BA}=\ker(BA)$, $K_B=\ker(B)$, $I_A=\operatorname{im}(A)$

再令 $n=\dim(V)$. 由核像维数公式可知, 即证等式等价于

$$n-\dim(K_A)=n-\dim(K_{BA})+\dim(I_A\cap K_B)$$
$$\Longleftrightarrow\dim(I_A\cap K_B)=\dim(K_{BA})-\dim(K_A)$$

定义: $\phi:\ K_{BA}\longrightarrow I_A\cap K_B$

$$\vec{x}\longmapsto A(\vec{x}).$$

良定义: $A(\vec{x})\in I_A$, 由 $\vec{x}\in K_{BA}$, 则 $B(A(\vec{x}))=\vec{0}$. 于是

$$\phi(\vec{x})=A\vec{x}\in\operatorname{im}(A)\cap\ker(B)$$

$\phi=A|_{K_{BA}}$, A是线性映射, 故ϕ是线性映射.

$\because$ 由 $K_A\subset K_{BA}$. 故 $\ker(\phi)=\ker(A)=K_A$

满: 设 $\vec{v}\in I_A\cap K_B$, 由于 $\vec{v}\in I_A$, 故 $\exists\,\vec{u}\in V$, 使得 $\vec{v}=A(\vec{u})$.

由 $\vec{v}\in K_B$, 故 $\vec{0}=B(\vec{v})=B(A(\vec{u}))$ $\Rightarrow\vec{u}\in K_{BA}$ 且 $\phi(\vec{u})=A\vec{u}=\vec{v}$ ②

由核像维数公式, 可得

$$\dim(\ker(\phi))+\dim(\operatorname{im}(\phi))=\dim(K_{BA})$$

$$\dim(K_A)+\dim(\mathrm{im}(A)\cap\ker(B))=\dim(K_{BA})$$

A用A^{i-1}代替，B用A代替，故

$$\mathrm{rank}(A^{i-1})=\mathrm{rank}(A^{i})+\dim(\mathrm{im}(A^{i-1})\cap\ker(A)).$$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{im}(A^{i-1})\cap\ker(A))=\mathrm{rank}(A^{i-1})-\mathrm{rank}(A^{i})$$

$$=n-\dim(\ker(A^{i-1}))-(n-\dim(\ker(A^{i})))$$

$$=\dim(\ker(A^{i}))-\dim(\ker(A^{i-1})).$$

设V,W为域F上的线性空间，$\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$.

$\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$为$V$的一组基，$\{\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m\}$为$W$的一组基，设 $\varphi(\vec{e}_i)=(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m)\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{mi}\end{pmatrix}$，$i=1,\dots,n$，$a_{ij}\in F$.

则$(\varphi(\vec{e}_1),\dots,\varphi(\vec{e}_n))=(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m)A$，这里$A=(a_{ij})$.

称A为φ在$\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$，$\{\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m\}$下的矩阵表示且唯一.

$$\mathrm{Hom}(V,W)\cong F^{m\times n}$$

$$\varphi \longmapsto A_\varphi$$

$$\varphi_A:\vec{x}\to A\vec{x} \longleftarrow A$$

记$\mathrm{rank}(\varphi)=\dim(\mathrm{im}(\varphi))=\mathrm{rank}(A)$，则 $\dim(V)=\mathrm{rank}\,\varphi+\dim(V_A)=\dim(\mathrm{im}\,\varphi)+\dim(\ker\varphi)$.

例 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. 求$\varphi: M_2(\mathbb{R})\longrightarrow M_2(\mathbb{R})$，$X\longmapsto XA$ 在$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵表示.

解：$\varphi(E_{11})=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}=aE_{11}+bE_{12}$.

$\varphi(E_{12})=cE_{11}+dE_{12}$.

$\varphi(E_{21})=aE_{21}+bE_{22}$

$\varphi(E_{22})=cE_{21}+dE_{22}$

$$(\varphi(E_{11}),\varphi(E_{12}),\varphi(E_{21}),\varphi(E_{22}))=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{pmatrix}$$

矩阵表示运算

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi\leftrightarrow B} & W \\ & {\scriptstyle \psi\circ\varphi,\ AB}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \psi\leftrightarrow A} \\ & & U \end{array}$$

，则$\psi\circ\varphi$的矩阵表示为AB

$$\mathrm{rank}(AB)\le\min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}(\psi\circ\varphi)\le\min\{\mathrm{rank}\,\psi,\mathrm{rank}\,\varphi\}.$$

相似矩阵

$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组基，$\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的另一组基，且

$$(\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})P,\quad P\in GL_n(F)$$

$\mathcal{A}$ 在 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 下的矩阵为 A，则 $\mathcal{A}$ 在 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ 下矩阵为 $P^{-1}AP$
$$\overset{\cdot\cdot}{B}$$
i.e. $B\sim_s A$

prop. 设 $A,B\in M_n(F)$，若 $A\sim_s B$，则

$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$，$\det(A)=\det(B)$，$\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$

例 $\operatorname{Char}(F)=0$. 证明下列矩阵不相似.

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\not\sim_s\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}0&2&1\\0&1&3\\3&0&0\end{pmatrix}\not\sim_s\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&3&1\end{pmatrix}$

解: $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1$,

$\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}=3\neq1$

行列式是相似不变量，两矩阵不相似.

$\operatorname{tr}\begin{pmatrix}0&2&1\\0&1&3\\3&0&0\end{pmatrix}=1$，$\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&3&1\end{pmatrix}=2$

$\Rightarrow$ 两矩阵不相似.

例 设 $A\in M_n(F)$ 且对任意 $P\in GL_n(F)$，$PA=AP$. 证明: A 是数乘矩阵.

解: 设 $A=(a_{ij})$ 而 $L_{ij}(1)$ 是第三类初等矩阵，$i,j\in\{1,2,\dots,n\}$，$i\neq j$. 由

$$L_{ij}(1)A=AL_{ij}(1)$$

可得. $a_{ii}+a_{ji}=a_{ii}$

$\Rightarrow a_{ji}=0$

设 L_{ij} 是第一类初等矩阵，由 $L_{ij}A=AL_{ij}$ 可知，$a_{ii}=a_{jj}$，$i,j\in\{1,2,\dots,n\}$.

$\Rightarrow A$ 是数乘矩阵

另一种观点.(线性算子角度)

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果对任意的可逆线性算子 $\mathcal{P}\in\mathcal{L}(V)$，$\mathcal{P}\mathcal{A}=\mathcal{A}\mathcal{P}$，则 $\mathcal{A}$ 是数乘算子

设 V 的一组基为 $\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}$

① 若对 $\forall i=1,\dots,n$，$\exists\lambda_i\in F$. $\mathcal{A}\vec{v_i}=\lambda_i\vec{v_i}$.

由 $\mathcal{A}$ 不是数乘算子，则 $\exists i_1,i_2$，s.t. $i_1\neq i_2$

$\mathcal{A}(\vec{v_{i_1}}+\vec{v_{i_2}})=\lambda_{i_1}\vec{v_{i_1}}+\lambda_{i_2}\vec{v_{i_2}}$

易证 $\lambda_{i_1}\vec{v_{i_1}}+\lambda_{i_2}\vec{v_{i_2}}\neq\lambda(\vec{v_{i_1}}+\vec{v_{i_2}})$，$\forall\lambda\in F$

令 $\vec{u}=\vec{v_{i_1}}+\vec{v_{i_2}}$

$\vec{v}=\lambda_{i_1}\vec{v_{i_1}}+\lambda_{i_2}\vec{v_{i_2}}$ 即可

② 若 $\exists i\in\{1,\dots,n\}$，s.t. $\forall\lambda\in F$，

$\mathcal{A}\vec{v_i}\neq\lambda\vec{v_i}$.

令 $\vec{u}=\vec{v_i}$，$\vec{v}=\mathcal{A}\vec{v_i}$

pf 假设 $\boxed{\mathcal{A}\text{不是数乘算子，则}\ \exists\,\vec{u},\vec{v}\in V\text{，线性无关，使得}\ \mathcal{A}(\vec{u})=\vec{v}}$，令 $\vec{e_1}=\vec{u}$，$\vec{e_2}=\vec{v}$.

则 $\mathcal{A}(\vec{e_1})=\vec{e_2}$. 由 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 扩充为 V 的一组基 $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\dots,\vec{e_n}$. 设 $\vec{w}=\mathcal{A}(\vec{e_2})$，

情形1. $\vec{w}\neq\vec{e_1}$，令 $\mathcal{P}$ 是可逆线性算子满足 $\mathcal{P}(\vec{e_1})=\vec{e_2}$，$\mathcal{P}(\vec{e_2})=\vec{e_1}$. 则

$\mathcal{A}P(\vec{e_1})=\mathcal{A}(\vec{e_2})=\vec{w}$，$P\mathcal{A}(\vec{e_1})=P(\vec{e_2})=\vec{e_1}$.

$\Rightarrow P\mathcal{A}\neq\mathcal{A}P$. $\rightarrow\leftarrow$

$\vec{w}=\vec{e_1}$. 由 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 线性无关，故 $\vec{e_1},\vec{e_1}+\vec{e_2}$ 线性无关. 于是存在可逆线性算子 P，使得

$P(\vec{e_1})=\vec{e_1}+\vec{e_2}$，$P(\vec{e_2})=\vec{e_1}$

$\mathcal{A}P(\vec{e_1})=\mathcal{A}(\vec{e_1}+\vec{e_2})=\vec{e_2}+\vec{e_1}$，$P\mathcal{A}(\vec{e_1})=P(\vec{e_2})=\vec{e_1}$

$\Rightarrow P\mathcal{A}\neq\mathcal{A}P$ $\rightarrow\leftarrow$

核像分解 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，则

$$V=\ker(\mathcal{A})\oplus\mathrm{im}(\mathcal{A})\Longleftrightarrow\mathrm{rank}(\mathcal{A})=\mathrm{rank}(\mathcal{A}^2)$$

极小多项式

Def 4.2. 设 $f\in F[t]$. $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $f(\mathcal{A})=0$. 则称 f 是关于 $\mathcal{A}$ 的零化多项式. 关于 $\mathcal{A}$ 的非零首一零化多项式中次数最小的称为 $\mathcal{A}$ 的极小多项式，记为 $\mu_{\mathcal{A}}$

Remark. ① $f(\mathcal{A})=0$，则 $\mu_{\mathcal{A}}\mid f$

② $\deg\mu_{\mathcal{A}}\leq n^2$.

例 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1&0\\0&\alpha_2\end{pmatrix}\in M_2(F)$，$\alpha_1,\alpha_2\in F$. 求 A 的极小多项式

解：若 $\deg\mu_A=1$. 设 $f_0E+A=O_2$，即 $\begin{pmatrix}f_0+\alpha_1&0\\0&f_0+\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}f_0+\alpha_1=0\\f_0+\alpha_2=0\end{cases}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=-f_0$$

$$\Rightarrow\mu_A=t-\alpha$$

若 $\alpha_1\neq\alpha_2$，显然 $\deg\mu_A\geq2$.

设 $\exists f_0,f_1\in F$, s.t. $f_0E+f_1A+A^2=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}f_0+\alpha_1f_1+\alpha_1^2=0\\f_0+\alpha_2f_1+\alpha_2^2=0\end{cases}\Rightarrow f_0=\frac{\begin{vmatrix}-\alpha_1^2&\alpha_1\\-\alpha_2^2&\alpha_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&\alpha_1\\1&\alpha_2\end{vmatrix}},\quad f_1=\frac{\begin{vmatrix}1&-\alpha_1^2\\1&-\alpha_2^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&\alpha_1\\1&\alpha_2\end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow\mu_A=t^2+f_1A+f_0A=t^2-(\alpha_1+\alpha_2)t+\alpha_1\alpha_2.$$

Prop. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $\deg(\mu_{\mathcal{A}})=1 \Leftrightarrow \mathcal{A}$ 是数乘算子.

例 $\mu_{\mathcal{O}}=t$, $\mu_{\mathcal{E}}=t-1$.

Prop $A=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$, 则 $\mu_A=\operatorname{lcm}(\mu_{A_1}, \mu_{A_2})$

法二:

$$\mu_A=\operatorname{lcm}(\mu_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_2})=\operatorname{lcm}(t-\alpha_1, t-\alpha_2)=\begin{cases}(t-\alpha_1)(t-\alpha_2), & \alpha_1\neq\alpha_2 \\ t-\alpha_1, & \alpha_1=\alpha_2\end{cases}$$

不变子空间

Def. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. U 是 V 子空间, 如果 $\mathcal{A}(U)\subset U$, 则称 U 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

例 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, U 是 V 是 $\mathcal{A}$ 子空间. 证明: 对任意 $f\in F[t]$, U 是 $f(\mathcal{A})$ 不变子.

Pf: 对 $k\in\mathbb{N}$ 归纳证明 U 是 $\mathcal{A}^k$ 一不变子.

对任意 $\vec{u}\in U$, $\mathcal{E}(\vec{u})=\vec{u}\in U$. $k=0$ 时结论成立.

设 $k>1$ 且结论对于 $k-1$ 成立, 则 $\mathcal{A}^k(U)=\mathcal{A}(\mathcal{A}^{k-1}(\vec{u}))$.

由于 $\mathcal{A}^{k-1}(\vec{u})\in U$. (归纳假设).

则 $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{k-1}(\vec{u}))\in U$ (U 是 $\mathcal{A}$ 不变子).

设 $f=f_m t^m+\cdots+f_1 t+f_0$, $f_i\in F$, 则 $f(\mathcal{A})(\vec{u})=f_m\mathcal{A}^m(\vec{u})+\cdots+f_1\mathcal{A}(\vec{u})+f_0\vec{u}$.

故 $f(\mathcal{A})(\vec{u})\in U$.