第十周习题课

——线性映射(线性算子)在基下的矩阵

作业讲解

(先补充李老师说要讲的题)(最后一页)

一. 线性映射在一组基下的矩阵

设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 F 上 n 维线性空间 V 上的一组基. 对任意 $v \in V$, 有

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \triangleq (e_1\ e_2\ \cdots\ e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

其中 $x_i \in F$, $i=1,\cdots,n$. 若 $v_1, \cdots, v_s \in V$, 且 $v_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$, 则

$$(v_1, v_2, \cdots, v_s) \triangleq (e_1\ e_2\ \cdots\ e_n)\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{ns} \end{pmatrix}_{n\times s}$$

设 ϕ 是 $V \to W$ 的线性映射, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ 是 W 的一组基, 考虑

$$\begin{aligned}
&(\phi(v_1), \phi(v_2), \cdots, \phi(v_n)) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} w_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2} w_i, \cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{in} w_i\right) \\
&= (w_1, \cdots, w_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

则 $A = (x_{ij})_{m\times n}$ 称为 ϕ 在 $e_1, \cdots, e_n$; $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m$ 下的矩阵.

① 任意 $v \in V$, 计算 $\phi(v)$.

② 计算 $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基

③ 计算 ϕ 在另一组基下的矩阵.

① 设 $v\in V$，$v=(e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，则

$$\begin{aligned}\phi(v)&=x_1\phi(e_1)+\cdots+x_n\phi(e_n)\\&=\big(\phi(e_1),\cdots,\phi(e_n)\big)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\\&=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\\&=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\left(A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

所以设 $A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$，则 $\phi(v)=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_m\varepsilon_m\in W$.

② 计算 $rank(\phi)$ 和 $ker(\phi)$ 的一组基.

结论：设 A 是 ϕ 在 $e_1,\cdots,e_n$; $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$ 下的矩阵，若 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r$ 是 A 的列向量生成的空间的一组基，则 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\vec{v}_1,\cdots,(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\vec{v}_r$ 是 $im(\phi)$ 的一组基. 若 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_{n-r}$ 是 A 的解空间的一组基，则 $(e_1,\cdots,e_n)\vec{u}_1,\cdots,(e_1,\cdots,e_n)\vec{u}_{n-r}$ 是 $ker(\phi)$ 的一组基.

证明：因为 $im(\phi)=\{\phi(v)\mid v\in V\}$

$$\begin{aligned}&=\left\{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m\right\}\\&=\left\{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m\right\}\end{aligned}$$

所以 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}\in im\phi \Leftrightarrow \exists\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m$，使得 $\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=x_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+x_n\vec{A}^{(n)}$，$A=(\vec{A}^{(1)}\cdots\vec{A}^{(n)})$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$ 属于 $\langle\vec{A}^{(1)},\cdots,\vec{A}^{(n)}\rangle$

所以 $im(\phi)=\left\{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}\in\langle\vec{A}^{(1)},\cdots,\vec{A}^{(n)}\rangle\right\}$.

设 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_r$ 是 $\langle\vec{A}^{(1)},\cdots,\vec{A}^{(n)}\rangle$ 的一组基，则

$$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\vec{v}_1,\cdots,(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\vec{v}_r$$

是 $\mathrm{im}\phi$ 的一组基.(?)

因为
$$\begin{aligned}\ker\phi&=\{v\in V\mid\phi(v)=0\}\\&=\left\{v\in V\ \middle|\ (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0,\ v=(e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\}\\&=\left\{v=\sum_{i=1}^n x_ie_i\in V\ \middle|\ A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0\right\}.\end{aligned}$$

所以，$v=\sum_{i=1}^n x_ie_i\in\ker\phi\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$. 所以计算 $AX=0$ 的解空间的一组基 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_{n-r}$，则

$$(e_1,\cdots,e_n)\vec{u}_1,\cdots,(e_1,\cdots,e_n)\vec{u}_{n-r}$$

是 $\ker\phi$ 的一组基.(?).

③ 计算 ϕ 在另一组基下的矩阵.

引理：若 $(v_1,\cdots,v_n)=(e_1,\cdots,e_n)P$，则 v_1,v_2,v_3 是 V 的基当且仅当 P 可逆.

证明：设 $P=(\vec{P}_1,\cdots,\vec{P}_n)$，则

$$v_1,\cdots,v_n\text{ 线性无关}\Leftrightarrow\vec{P}_1,\cdots,\vec{P}_n\text{ 线性无关}\Leftrightarrow P\text{ 可逆}.$$

而因为 $\dim V=n$，所以

$$v_1,\cdots,v_n\text{ 是 }V\text{ 的一组基}\Leftrightarrow v_1,\cdots,v_n\text{ 线性无关}.$$

引理：若 $(v_1,\cdots,v_n)=(e_1,\cdots,e_n)P$，则

$$\begin{aligned}\phi(v_1,\cdots,v_n)&\triangleq(\phi(v_1),\cdots,\phi(v_n))\\&=(\phi(e_1),\cdots,\phi(e_n))P.\ (\text{讲义有}).\end{aligned}$$

结论：设 $(v_1,\cdots,v_n)=(e_1,\cdots,e_n)P$，$(w_1,\cdots,w_m)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)Q$. P,Q 可逆. 则 ϕ 在 $v_1,\cdots,v_n;w_1,\cdots,w_m$ 下的矩阵为

$$Q^{-1}AP.$$

其中 A 是 ϕ 在 $e_1,\cdots,e_n;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$ 下的矩阵

证明：$(\phi(v_1), \cdots, \phi(v_n))$

$$= \phi(v_1, \cdots, v_n)$$

$$\overset{\text{引理}}{=} \phi(e_1, \cdots, e_n)P$$

$$\overset{\text{基下矩阵}}{=} (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)AP$$

$$= (w_1, \cdots, w_m)Q^{-1}AP$$

所以 ϕ 在 $v_1, \cdots, v_n; w_1, \cdots, w_m$ 下的矩阵为 $Q^{-1}AP$.

习题 1： $\phi(e_1) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$，$\phi(e_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$，$\phi(e_3) = \varepsilon_2 - 2\varepsilon_1$

(1) 因为 $(\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3))$

$$= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2 - 2\varepsilon_1)$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 是 ϕ 在 $e_1, e_2, e_3; \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵.

(2) 计算得 $rank(A) = 2$，所以 $rank(\phi) = 2$

计算得 $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ 是 $AX = 0$ 的解空间的一组基，所以

$$\{3e_1 + e_2 + 2e_3\}$$

是 $\ker\phi$ 的一组基.

（计算得 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的列向量生成空间的一组基，则

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

是 $\mathrm{im}\phi$ 的一组基）

(3). $(v_1, v_2, v_3) = (e_1\ e_2\ e_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(w_1, w_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

因为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 都可逆，所以 v_1, v_2, v_3 是 V 的一组基，

w_1, w_2 是 W 的一组基. ϕ 在 v_1, v_2, v_3; w_1, w_2 下

$$\begin{aligned}\phi(v_1, v_2, v_3) &= \phi(e_1\ e_2\ e_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon_1\ \varepsilon_2)A\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (w_1\ w_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (w_1, w_2)\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

则 ϕ 在 v_1, v_2, v_3; w_1, w_2 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$. □

2. 线性算子.

$\mathcal{A}: V \to V$ 的线性映射称为线性算子(线性变换).

设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 V 的一组基.

① $(\mathcal{A}(e_1), \cdots, \mathcal{A}(e_n)) = (e_1, \cdots, e_n)A$, 则 A 称为 ϕ 在 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵.

② 计算 A 的列空间的基 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_r$ 和 A 的解空间的基 $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_{n-r}$,

即得 $im(\mathcal{A})$ 的基为 $(e_1, \cdots, e_n)\vec{v}_1, \cdots, (e_1, \cdots, e_n)\vec{v}_r$,

$ker(\mathcal{A})$ 的基为 $(e_1, \cdots, e_n)\vec{u}_1, \cdots, (e_1, \cdots, e_n)\vec{u}_{n-r}$.

③ $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的另一组基，而且

$$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (e_1, \cdots, e_n)P,$$

则 $\mathcal{A}$ 在 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$P^{-1}AP.$$

习题2.

(i) 因为 $\forall \alpha, \beta \in F$，$X, Y \in M_n(F)$，有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha X + \beta Y) &= C^{-1}(\alpha X + \beta Y)C \\ &= \alpha C^{-1}XC + \beta C^{-1}YC \\ &= \alpha \mathcal{A}(X) + \beta \mathcal{A}(Y)\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{A}$ 是线性算子.

(ii) $$\begin{aligned}\mathcal{A}(XY) &= C^{-1}XYC \\ &= C^{-1}XCC^{-1}YC \\ &= \mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y).\end{aligned}$$

(iii). 因为 $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \dim(\operatorname{im}\mathcal{A})$. 对任意 $Y \in M_n(F)$，存在 $X = C\ \ YC^{-1} \in M_n(F)$，使得

$$C^{-1}XC = Y,$$

所以 $\mathcal{A}$ 是满射，则 $\operatorname{im}\mathcal{A} = M_n(F)$，所以

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \dim(\operatorname{im}\mathcal{A}) = \dim(M_n(F)) = n^2$$

3. 幂等. $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$.

4. 方法一：因为 $\ker\mathcal{A}+\mathrm{im}\,\mathcal{A}=V$ 当且仅当 $\ker\mathcal{A}+\mathrm{im}\,\mathcal{A}$ 是直和，

即 $\ker\mathcal{A}\cap\mathrm{im}\,\mathcal{A}=\{0\}$. 所以只需证明

$$\ker\mathcal{A}\cap\mathrm{im}\,\mathcal{A}=\{0\}.$$

设 $y\in\ker\mathcal{A}\cap\mathrm{im}\,\mathcal{A}$，则 $\mathcal{A}(y)=0$ 且存在 $x\in V$，使得 $y=\mathcal{A}(x)$.

又因为 $\mathcal{A}^3=\mathcal{A}$，所以

$$\begin{aligned} y=\mathcal{A}(x)=\mathcal{A}^3(x)&=\mathcal{A}\circ\mathcal{A}(\mathcal{A}(x)) \\ &=\mathcal{A}\circ\mathcal{A}(y) \\ &=\mathcal{A}(0)=0. \end{aligned}$$

所以 $\ker\mathcal{A}\cap\mathrm{im}\,\mathcal{A}=\{0\}$.

方法二：根据核像分解，只需证 $\mathrm{rank}(\mathcal{A}^2)=\mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

因为 $\mathrm{im}(\mathcal{A})\supseteq\mathrm{im}(\mathcal{A}^2)\supseteq\mathrm{im}(\mathcal{A}^3)$，而

$$\mathrm{im}(\mathcal{A})=\mathrm{im}(\mathcal{A}^3)$$

所以 $\mathrm{im}\,\mathcal{A}=\mathrm{im}(\mathcal{A}^2)$，则 $\mathrm{rank}(\mathcal{A}^2)=\mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

方法三. 设 $v\in V$，因为 $\mathcal{A}(v)=\mathcal{A}^3(v)$，所以

$$\mathcal{A}(v-\mathcal{A}^2(v))=0.$$

则 $v-\mathcal{A}^2(v)\in\ker\mathcal{A}$，设 $v-\mathcal{A}^2(v)=w$，则

$$v=w+\mathcal{A}^2(v),\quad w\in\ker\mathcal{A}.\ \mathcal{A}^2(v)\in\mathrm{im}\,\mathcal{A}.$$

所以 $v\in\ker\mathcal{A}+\mathrm{im}\,\mathcal{A}$，即

$$V\subseteq\ker\mathcal{A}+\mathrm{im}\,\mathcal{A}.$$

显然 $\ker\mathcal{A}+\mathrm{im}\,\mathcal{A}\subseteq V$，所以 $V=\ker\mathcal{A}+\mathrm{im}\,\mathcal{A}$.

(1)

选做：ϕ: $\mathrm{im}\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{im}\mathcal{BA}$

$$y \longmapsto \mathcal{B}y$$

则 $\mathrm{im}\phi = \mathrm{im}\mathcal{BA}$，$\ker\phi = \ker\mathcal{B} \cap \mathrm{im}\mathcal{A}$，则

$$\dim(\mathrm{im}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{im}\phi) + \dim(\ker\phi)$$

即 $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{BA}) + \dim(\ker\mathcal{B} \cap \mathrm{im}\mathcal{A})$.

(2) 令题(1)中的 $\mathcal{A}$ 等于 $\mathcal{A}^{i-1}$，再用对偶定理.

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，证明

(1) A^tA 半正定

(2) 设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，则

$$A^tA\vec{x}=\vec{0}_n \text{ 和 } A\vec{x}=\vec{0}_m$$

的解空间相同.

(3) $\mathrm{rank}(A^tA)=\mathrm{rank}(A)$.

证明：(1) 因为 $(A^tA)^t=A^t(A^t)^t=A^tA$，所以 $A^tA\in SM_n(\mathbb{R})$.

设 $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$，则

$$\vec{x}^t(A^tA)\vec{x}=(A\vec{x})^tA\vec{x}$$

设 $A\vec{x}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$，则 $(A\vec{x})^tA\vec{x}=(y_1,\cdots,y_m)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=y_1^2+\cdots+y_m^2\geq 0$.

所以 A^tA 半正定.（反过来自行思考！）

(2) 设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，显然 $A\vec{x}=\vec{0}_m$ 可以推出 $A^tA\vec{x}=\vec{0}_n$，反之设 $A^tA\vec{x}=\vec{0}_n$.

则 $\vec{x}^tA^tA\vec{x}=\vec{0}_n$，设 $A\vec{x}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$，则

$$\vec{x}^tA^tA\vec{x}=(A\vec{x})^tA\vec{x}=(y_1\cdots y_n)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=y_1^2+\cdots+y_m^2=0.$$

则 $y_1=\cdots=y_m=0$，所以 $A\vec{x}=\vec{0}_m$. 所以

$$A^tA\vec{x}=\vec{0}_n \text{ 和 } A\vec{x}=\vec{0}_m$$

的解空间相同.

(3) 由对偶定理直接得到.