1、

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\-3&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}8&0\\-7&1\end{pmatrix}$$

① 数学归纳法证明 $A^k=\begin{pmatrix}2^k&0\\1-2^k&1\end{pmatrix}$，$k\geq 1$.

当$k=1$，$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$

假设命题对$k-1$成立，来看n.

即：$A^{k-1}=\begin{pmatrix}2^{k-1}&0\\1-2^{k-1}&1\end{pmatrix}$

$$A^k=\underbrace{\begin{pmatrix}2^{k-1}&0\\1-2^{k-1}&1\end{pmatrix}}_{A^{k-1}}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{k-1}&0\\1-2^{k-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&0\\1-2^k&1\end{pmatrix}$$

② 设$B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$，计算得$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$$A^k=B\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\underbrace{B^{-1}B}_{E}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}B^{-1}\cdots B\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}B^{-1}=B\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}^kB^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&0\\1-2^k&1\end{pmatrix}$$

2. Pf：(1) 设$B=(b_{ij})_{m\times n}$，$C=(c_{ij})_{m\times n}$，再设$B+C=(d_{ij})_{m\times n}$，$(B+C)^t=(d_{ij}')_{n\times m}$，$B^t=(b_{ij}')_{n\times m}$，$C^t=(c_{ij}')_{n\times m}$.

则 $d_{ij}'=d_{ji}$，$b_{ij}'=b_{ji}$，$c_{ij}'=c_{ji}$. 且 $d_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$. 从而 $d_{ij}'=d_{ji}=c_{ji}+b_{ji}$
$=b_{ij}'+c_{ij}'$

$\Rightarrow (B+C)^t=B^t+C^t$

(2) 令 $B=\frac{A+A^t}{2}$，$C=\frac{A-A^t}{2}$，则 $A=B+C$

$$B^t=\left(\frac{A+A^t}{2}\right)^t=\frac{A^t+(A^t)^t}{2}=\frac{A^t+A}{2}=B$$

$$C^t=\left(\frac{A-A^t}{2}\right)^t=\frac{A^t-(A^t)^t}{2}=\frac{A^t-A}{2}=-C$$

3. Pf：(1) $A=A^t$，$(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}=A^{-1}$ $\Rightarrow A^{-1}$对称

CD

(2) $A^t=-A$，$(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}=(-A)^{-1}=-A^{-1}$ $\Rightarrow A^{-1}$斜对称

由于 $\vec{u_1},\cdots,\vec{u_k}$ 线性无关，则 $\beta_1=\cdots=\beta_k=0$

故 $\phi(\vec{u_1}),\cdots,\phi(\vec{u_k})$ 线性无关，故 $\dim(\phi(U))=k=\dim(U)$.

设 W 的一组基是 $\vec{w_1},\cdots,\vec{w_d}$，由于 ϕ 是满射，故 $\exists\ \vec{v_1},\cdots,\vec{v_d}\in\mathbb{R}^n$, s.t $\phi(\vec{v_i})=\vec{w_i}$, $i=1,2,\cdots,d$. 由于 $\vec{w_1},\cdots,\vec{w_d}$ 线性无关，故 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_d}$ 线性无关（线性映射保持线性相关性）

$\vec{v_1},\cdots,\vec{v_d}\in\phi^{-1}(W)$. 故 $\dim(\phi^{-1}(W))\geq d=\dim(W)$ （注：$\phi(\phi^{-1}(W))=W$ 需要用满射条件

7. $A\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $C=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(k+m)\times n}$

证明：(i) 以 C 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间 V_C 等于 $V_A\cap V_B$.

(ii) $\dim(V_A+V_B)=n+\mathrm{rank}(C)-\mathrm{rank}(A)-\mathrm{rank}(B)$

Pf: (i) 设 $\vec{v}\in V_A\cap V_B$，则 $A\vec{v}=\vec{0_k}$ 和 $B\vec{v}=\vec{0_m}$，故 $C\vec{v}=\vec{0}_{k+m}$. 于是，$\vec{v}\in V_C$

设 $\vec{w}\in V_C$，则 $C\vec{w}=\vec{0}_{k+m}$，故 $A\vec{w}=\vec{0_k}$ 和 $B\vec{w}=\vec{0_m}$

$\Rightarrow W\in V_A\cap V_B$

$\Rightarrow V_C=V_A\cap V_B$

(ii) $\dim(V_A+V_B)=\dim(V_A)+\dim(V_B)-\dim(V_A\cap V_B)$ [维数公式]

$=\dim(V_A)+\dim(V_B)-\dim(V_C)$ [$\because$ (i)]

$=(n-\mathrm{rank}(A))+(n-\mathrm{rank}(B))-(n-\mathrm{rank}(C))$

$=n+\mathrm{rank}(C)-\mathrm{rank}(A)-\mathrm{rank}(B)$.

8. $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $r=\mathrm{rank}(A)>0$，令

$$B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,r}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,r}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{r1}&a_{r2}&\cdots&a_{r,r}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{r\times r}$$

$\phi: V\to W$.

"$\Rightarrow$" 用线性映射基本定理时，导注意取的是 V 的一组基.

$\phi: R^r\to R^m$.

$\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{12}\\\vdots\\b_{1r}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}b_{1,1}\\\vdots\\b_{1,r}\\b_{1,r+1}\\\vdots\\b_{1,m}\end{pmatrix}$ 不一定构成线性映射

证明：$\mathrm{rank}(B)=r\iff A$ 的前 r 行线性无关且 A 的前 r 列线性无关

Pf: "$\Rightarrow$" $\mathrm{rank}(B)=r$，则 $\vec{B_1},\cdots,\vec{B_r}$ 线性无关，

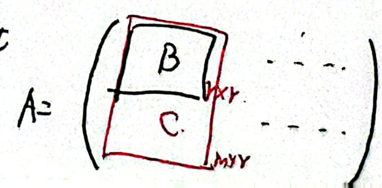
$\vec{A_1},\cdots,\vec{A_r}$ 是 $\vec{B_1},\cdots,\vec{B_r}$ 的延伸，故 $\vec{A_1},\cdots,\vec{A_r}$ 线性无关

同理 $\vec{A^{(1)}},\cdots,\vec{A^{(r)}}$ 线性无关

"$\Leftarrow$" $\mathrm{rank}(A)=r$ 且 $\vec{A_1},\cdots,\vec{A_r}$ 线性无关，故 $\vec{A_1},\cdots,\vec{A_r}$ 是 $V_r(A)$ 的一组基.

故对 $\forall\ i\in\{r+1,\cdots,m\}$，$\exists\ \alpha_{i,1},\cdots,\alpha_{i,r}\in\mathbb{R}$, s.t

$\vec{A_i}=\alpha_{i,1}\vec{A_1}+\cdots+\alpha_{i,r}\vec{A_r}$



①

4.（Sylvester 不等式） $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-s \le \mathrm{rank}(AB)$.

若 $A^2=O \Rightarrow \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A)-n \le \mathrm{rank}(O)=0$.

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A) \le \frac{n}{2}$

若 $A^3=O$，$\Rightarrow \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A^2)-n \le 0$，$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A)-n \le \mathrm{rank}(A^2)$

$\Rightarrow 2\mathrm{rank}(A)-n \le n-\mathrm{rank}(A)$

$\Rightarrow 3\mathrm{rank}(A) \le 2n$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A) \le \frac{2}{3}n$.

期中考题

5. 设 $m,n\in\mathbb{Z}^+$，$g=\gcd(m,n)$. 证明：

① 对任意小于 g 的正整数 k，不存在 $x,y\in\mathbb{Z}$ 使得 $xm+yn=k$

② 如果 $a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$，满足 $a|(mn)$ 且 $\gcd(a,m)=1$，则 $a|n$.

Pf：① 假设 $\exists\, u,v\in\mathbb{Z}$，s.t $um+vn=k$. 由 $g|m$，$g|n$. 得 $g|k$. 从而 $k\ge g>0$. $\to\leftarrow$

② 由 $\gcd(a,m)=1 \Rightarrow \exists\, u,v\in\mathbb{Z}$，s.t $ua+mv=1$

法一

$\Rightarrow uan+vmn=n$.

$a|mn$，$a|an \Rightarrow a|n$.

法二：$\gcd(a,m)=1$，则 $am=\mathrm{lcm}(a,m)$.

$a|mn$，$m|mn \Rightarrow mn$ 是 a,m 的公倍式

$\Rightarrow am|mn \Rightarrow a|n$.

错误：$a|mn \Rightarrow a|m$ 或 $a|n$.

如 a 是一个素数.

利用因子去讨论，分类情况不完全

6. 设 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是线性映射. 证明：

① 设 ϕ 是单射且 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，证明：$\dim(U)=\dim(\phi(U))$.

② 设 ϕ 是满射且 W 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，证明：$\dim(\phi^{-1}(W))\ge\dim(W)$.

Pf：① 设 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_k$ 是 U 的一组基，则对任意 $\vec{u}\in U$，$\exists\, \alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{R}$，s.t

$$\vec{u}=\alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_k\vec{u}_k$$

则 $\phi(\vec{u})=\alpha_1\phi(\vec{u}_1)+\cdots+\alpha_k\phi(\vec{u}_k)$. 于是，① $\phi(U)=\langle\phi(\vec{u}_1),\cdots,\phi(\vec{u}_k)\rangle$

设 $\beta_1,\cdots,\beta_k\in\mathbb{R}$ 使得 $\beta_1\phi(\vec{u}_1)+\cdots+\beta_k\phi(\vec{u}_k)=\vec{0}_m$. 则

$$\phi(\beta_1\vec{u}_1+\cdots+\beta_k\vec{u}_k)=\vec{0}_m$$

ϕ 是单射 $\Rightarrow \beta_1\vec{u}_1+\cdots+\beta_k\vec{u}_k=\vec{0}_n$

$\Rightarrow \vec{C_i} = \alpha_{i,1}\vec{C_1} + \cdots + \alpha_{i,r}\vec{C_r}$

$\vec{C_1}=\vec{B_1}, \cdots, \vec{C_r}=\vec{B_r}$ 得出：$V_r(C) = \langle \vec{B_1}, \cdots, \vec{B_r} \rangle$. (1)

C的所有列就是A的前r列且它们线性无关，$rank(C)=r$. 故 $\dim(V_r(C))=r$. 根据(1), $\vec{B_1}, \cdots, \vec{B_r}$ 线性无关，故 $\dim V_r(B)=r$，即 $rank(B)=r$.

"$\Leftarrow$"：$rank(A)=r$ 且 $\vec{A_1}, \cdots, \vec{A_r}$ 线性无关，故 $\vec{A_1}, \cdots, \vec{A_r}$ 是行空间 $V_r(A)$ 的一组基.

故对任意 $i\in\{r+1, \cdots, m\}$，$\exists\, \alpha_{i,1}, \cdots, \alpha_{i,r} \in \mathbb{R}$, s.t.

$$\vec{A_i} = \alpha_{i,1}\vec{A_1} + \cdots + \alpha_{i,r}\vec{A_r}$$

故通过初等行变换，

$$A \to \begin{pmatrix} \vec{A_1} \\ \vdots \\ \vec{A_r} \\ O_{(m-r)\times n} \end{pmatrix} \text{"}D\text{"}$$

初等行变换不改变列的线性无关性，故 $\vec{A^{(1)}}, \cdots, \vec{A^{(r)}}$ 列线性无关 蕴含 $\vec{D^{(1)}}, \cdots, \vec{D^{(r)}}$ 线性无关. 但

$$\vec{D^{(j)}} = \begin{pmatrix} \vec{B^{(j)}} \\ \vec{O}_{m-r} \end{pmatrix}, j=1, \cdots, r.$$

故 $\vec{D^{(1)}}, \cdots, \vec{D^{(r)}}$ 线性无关 蕴含 $\vec{B^{(1)}}, \cdots, \vec{B^{(r)}}$ 线性无关.

$\Rightarrow rank(B)=r$.

方阵

实数上所有方阵的集合记为 $M_n(\mathbb{R})$.

特殊方阵：$A\in M_n(\mathbb{R})$，$A=(a_{ij})$
- 对称矩阵，$A^t=A$，$a_{ji}=a_{ij}$
- 斜对称矩阵，$A^t=-A$，$a_{ji}=-a_{ij}$
- 幂零矩阵，$\exists k\in\mathbb{Z}^+$, s.t. $A^k=0$
- 幂等矩阵，$A^2=A$

中心元：设 $C\in M_n(\mathbb{R})$. 如果对任意 $A\in M_n(\mathbb{R})$，有 $AC=CA$，则称 C 是中心元

Thm. 设 $C\in M_n(\mathbb{R})$，则 C 是中心元 $\Leftrightarrow C=\lambda E_n$，$\lambda\in\mathbb{R}$.

(核心)搬运工原理. 对任意 $i,j\in\{1,\cdots,k\}$，设 $E_{ij}^{(k)}$ 是在 i 行 j 列处的元素等于1，其它元素都等于0的k阶方阵，

则对于 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$E_{ij}^{(m)}A = \begin{pmatrix} O_{(i-1)\times n} \\ \vec{A_j} \\ O_{(m-i)\times n} \end{pmatrix}$，$AE_{ij}^{(n)} = (O_{m\times(j-1)}, \vec{A^{(i)}}, O_{m\times(n-j)})$ ①

湘 设

$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$,

$$J_m=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}_{m\times m},\qquad J_n=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&&0\\&&&&1\\0&\cdots&&0&0\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

$$J_mA=(E_{12}^{(m)}+E_{23}^{(m)}+\cdots+E_{m-1,m}^{(m)})A=E_{12}^{(m)}A+E_{23}^{(m)}A+\cdots+E_{m-1,m}^{(m)}A$$

$$=\begin{pmatrix}\vec{A_2}\\\vec{0}\\\vdots\\\vec{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\vec{0}\\\vec{A_3}\\\vdots\\\vec{0}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\vec{0}\\\vec{0}\\\vdots\\\vec{A_m}\\\vec{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{A_2}\\\vec{A_3}\\\vdots\\\vec{A_m}\\\vec{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$AJ_n=A(E_{12}^{(n)}+E_{23}^{(n)}+\cdots+E_{n-1,n}^{(n)})=AE_{12}^{(n)}+AE_{23}^{(n)}+\cdots+AE_{n-1,n}^{(n)}$$

$$=(\vec{0},\vec{A^{(1)}},\vec{0},\cdots,\vec{0})+(\vec{0},\vec{0},\vec{A^{(2)}},\vec{0},\cdots,\vec{0})+\cdots+(\vec{0},\vec{0},\vec{0},\cdots,\vec{0},\vec{A^{(n-1)}})$$

$$=(\vec{0},\vec{A^{(1)}},\vec{A^{(2)}},\cdots,\vec{A^{(n-2)}},\vec{A^{(n-1)}}).$$

$$=\begin{pmatrix}0&a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n-1}\\0&a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{m,n-1}\end{pmatrix}$$

可逆矩阵

$A\in M_n(\mathbb{R})$，若∃ $B\in M_n(\mathbb{R})$，s.t $AB=BA=E$，则称A是可逆矩阵.

Thm A可逆 ⟺ A满秩

Prop A, B可逆,

① $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，AB可逆

② A^{-1}可逆 且 $(A^{-1})^{-1}=A$

③ A^t可逆，$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^T$

Def (初等等价) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$，如果存在 $P\in M_m(\mathbb{R})$, $Q\in M_n(\mathbb{R})$ 可逆矩阵，使得 $A=PBQ$，记作 $A\sim_e B$

Thm $A\sim_e B\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$, $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Def (初等矩阵). $F_{ij}^{(n)}$. E_n中第i行与j行互换.

$F_{ij}^{(n)}(\alpha)$ E_n中第j行倍乘α加到i行

$F_i^{(n)}(\lambda)$ E_n中第i行倍乘λ得到的矩阵.

(打洞引理) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则存在可逆矩阵 $P\in M_m(\mathbb{R})$ 和 $Q \in M_n(\mathbb{R})$, s.t.

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

且 $\operatorname{rank}(A)=r$.

应用：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$，证明存在 $B\in M_n(\mathbb{R})$，使得 $A=ABA$ 且 $B=BAB$

Pf：由矩阵等价标准形理论，存在可逆矩阵 $P,Q\in M_n(\mathbb{R})$. s.t. $PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$

令 $B=Q\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P$，则

$$ABA=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\underbrace{Q^{-1}Q}_{=E}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\underbrace{PP^{-1}}_{=E}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}=A$$

$$BAB=Q\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}PP^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}Q\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P=Q\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P=B$$

矩阵求逆

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_{12}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_{3,1}(1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{2,3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_3(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{1,2}(1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_{1,3}(1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=F_{1,3}(1)F_{1,2}(1)F_3(-\tfrac{1}{2})F_2(-\tfrac{1}{2})F_{2,3}F_{3,1}(1)F_{1,2}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

例 设 $A,B\in M_n(\mathbb{R})$, $AB=BA$, 求证 $\operatorname{rank}(A+B)+\operatorname{rank}AB\leq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

解: 设线性映射 $\varphi_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $\quad\varphi_B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$
$\vec{x}\mapsto A\vec{x}$. $\quad\vec{x}\mapsto B\vec{x}$

$\varphi_{AB}=\varphi_A\circ\varphi_B$.

$\varphi_{A+B}=\varphi_A+\varphi_B$.

设 $\mathbb{R}$子空间 $k_A=\ker\varphi_A$, $k_B=\ker\varphi_B$, $k_{AB}=\ker\varphi_{AB}$, $k_{A+B}=\ker(\varphi_{A+B})=\ker(\varphi_A+\varphi_B)$

$\dim(k_{AB})=n-\operatorname{rank}AB$

$\dim(k_{A+B})=n-\operatorname{rank}(A+B)$.

$\dim(k_A)=n-\operatorname{rank}(A)$.

$\dim(k_B)=n-\operatorname{rank}(B)$.

不等式等价为 证明: $\underline{\dim(k_A)+\dim(k_B)}\leq\dim(k_{AB})+\dim(k_{A+B})$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\parallel$

$\dim(k_A+k_B)-\dim(k_A\cap k_B)$.

下证 $k_A+k_B\subseteq k_{AB}$.

$\forall\vec{x}\in k_A+k_B$, 则$\exists\ \vec{x_A}\in k_A$, $\vec{x_B}\in k_B$, s.t $\vec{x}=\vec{x_A}+\vec{x_B}$

则 $\varphi_{AB}(\vec{x})=\varphi_{AB}(\vec{x_A})+\varphi_{AB}(\vec{x_B})=\varphi_A\circ\varphi_B(\vec{x_A})+\varphi_A\circ\varphi_B(\vec{x_B})$

$AB=BA\Rightarrow\varphi_A\circ\varphi_B=\varphi_B\circ\varphi_A$ $\quad=\varphi_B(\varphi_A(\vec{x_A}))+\varphi_A(\varphi_B(\vec{x_B}))$
$\quad\quad=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

$\Rightarrow\vec{x}\in k_{AB}$

$\Rightarrow k_A+k_B\subseteq k_{AB}$. $\quad\Rightarrow\dim(k_A+k_B)\leq\dim(k_{AB})$

再证 $k_A\cap k_B\subseteq k_{A+B}$.

$\forall\vec{x}\in k_A\cap k_B$, 即$\vec{x}\in k_A$且$\vec{x}\in k_B$., 即 $\varphi_A(\vec{x})=\vec{0}$, $\varphi_B(\vec{x})=\vec{0}$

$\varphi_{A+B}(\vec{x})=(\varphi_A+\varphi_B)(\vec{x})=\varphi_A(\vec{x})+\varphi_B(\vec{x})=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

$\Rightarrow\vec{x}\in\ker(\varphi_{A+B})$.

$\Rightarrow k_A\cap k_B\subseteq k_{A+B}$

$\Rightarrow\dim(k_A\cap k_B)\leq\dim(k_{A+B})$

$\Rightarrow$命题成立.