期中考试试卷

1. 略.

2. 找 $\ker\phi$ 的基.

例1

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{则 } \dim(\ker\phi_A)=3$$

则原方程化为

$$x_1+3x_2+x_3+x_4+x_5=0$$
$$-12x_2+(-x_3)-3x_4-5x_5=0$$

当 $x_3=1$, $x_4=0$, $x_5=0$, 则 $x_1=-\frac{3}{4}$, $x_2=-\frac{1}{12}$

当 $x_3=0$, $x_4=1$, $x_5=0$, 则 $x_1=-\frac{1}{4}$, $x_2=-\frac{1}{4}$

当 $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=1$, 则 $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=-\frac{5}{12}$

所以 $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{12} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\ker(\phi_A)$ 的一组基.

□

(不讲) 例2

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{则 } \dim(\ker\phi_A)=2$$

则原方程化为

$$\begin{cases} x_1+2x_3-2x_5=0 \\ x_2-x_3+3x_5=0 \\ x_4+4x_5=0. \end{cases}$$

当 $x_3=1$, $x_5=0$ 时, 则 $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_4=0$

当 $x_3=0$, $x_5=1$ 时, 则 $x_1=2$, $x_2=-3$ $x_4=-4$

所以 $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\-4\\1\end{pmatrix}$ 是 $\ker\phi_A$ 的一组基.

没写扣一分.

3. (i) 不是, 设 $\vec{v}\in\mathbb{Q}^n$, $\boxed{\vec{v}\neq 0,}$ 则 $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$, 但 $\sqrt{2}\vec{v}\notin\mathbb{Q}^n$.

所以不是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

□

(ii) 略.

4. 略.

5. (i) 反证, 假设存在 $x,y\in\mathbb{Z}$, 使得

$$xm+yn=k.$$

且 $k<g$, $k\in\mathbb{N}^+$, 则由 $g\mid m$, $g\mid n$, 可得

$$g\mid xm+yn=k$$

所以 $g\le k$, 矛盾.

(ii) 因为 $\gcd(a,m)=1$, 所以存在 $u,v\in\mathbb{Z}$, 使得

$$ua+vm=1.$$

两边同乘 n, 得 $uan+vmn=n$. 因为

$$a\mid uan,\quad a\mid mn,$$

所以 $a\mid uan+vmn$, 即 $a\mid n$.

□

常见错误：

1. $a|mn \Rightarrow a|m$ 或 $a|n$ ✗ （-4 或 -5）

2. 设 $k=\frac{mn}{a}=\frac{m}{a}\cdot n$，因为 $\gcd(m,a)=1$，所以 $\frac{m}{a}$ 是一个分数．而 k 是一个整数，所以 $a|n$．

（-3 或 -4）

（若说 $\frac{m}{a}$ 是既约分数，勉强扣 1 分）

注：用素因数分解（不详细讲）

不妨设 → $a\neq 1$，$m\neq 1$，则 $n\neq 1$．

设 $a=p_1^{n_1}\cdots p_s^{n_s}$，$p_i$ 为互不相同的素数．

设 $m=q_1^{m_1}\cdots q_l^{m_l}$，$q_j$ 为互不相同的素数．

设 $n=r_1^{t_1}\cdots r_u^{t_u}$，$r_k$ 为互不相同的素数．

因为 $a|mn$，所以存在 $k\in\mathbb{Z}$，使得

$$a\cdot k=mn$$

则

$$p_1^{n_1}\cdots p_s^{n_s}\cdot k=q_1^{m_1}\cdots q_l^{m_l}r_1^{t_1}\cdots r_u^{t_u}$$

因为 a,m 互素，所以 $\{p_1,\cdots,p_s\}\cap\{q_1,\cdots,q_l\}=\phi$，所以存在

$$r_{i_1},\cdots,r_{i_s}\in\{r_1,\cdots,r_u\},$$

使得 $p_1=r_{i_1},\cdots,p_s=r_{i_s}$，且 $n_1\le t_{i_1},\cdots,n_s\le t_{i_s}$，则

$$a|n.$$

（这种方法比较难表达清楚，酌情 -1 或不扣）

□

常见错误2：
写 $\phi^{-1}(\vec{w})$ ×

6. (i) 常见错误，直接用对偶定理

$$\dim(\ker\phi)+\dim(\mathrm{im}\,\phi)=n.$$

因为 $\ker\phi=\{0\}$，所以 $\dim(\mathrm{im}\,\phi)=n$，则 $\dim(U)=\dim(\phi(U))$. ×

(因为 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 的线性映射，所以 扣4分左右.

$$\mathrm{im}\,\phi=\phi(\mathbb{R}^n)\neq\phi(U)\qquad \dim(U)\neq n.)$$

修正：定义 $\psi:\ U\longrightarrow\mathbb{R}^m$

$$\vec{u}\longmapsto\phi(\vec{u}).$$

则 $\mathrm{im}\,\psi=\psi(U)=\phi(U)$. 由向量空间的线性映射的对偶定理，有

$$\dim(U)=\dim(\ker\psi)+\dim(\mathrm{im}\,\psi)$$

因为 ϕ 是单射，则 ψ 也是单射，所以 $\ker\psi=\{0\}$，则

$$\dim(U)=\dim(\mathrm{im}\,\psi)=\dim(\phi(U)).$$

($\psi:U\to\mathbb{R}^m$ 写清楚，扣1分或不扣)

(ii) 略. (因为满射 设写扣1分)

7. (i) 证明 $V_C\subseteq V_A\cap V_B$ 且 $V_A\cap V_B\subseteq V_C$

(参考答案或上上周习题课讲义).

(ii) 对偶定理 + 维数公式.

8. 证明:

"$\Rightarrow$" 因为 $\mathrm{rank}(B)=r$,所以 B 的行向量 $\vec{B}_1,\cdots,\vec{B}_r$ 线性无关. 因为 $\vec{A}_1,\cdots,\vec{A}_r$ 分别是 $\vec{B}_1,\cdots,\vec{B}_r$ 从 $\mathbb{R}^{1\times r}$ 到 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 的延伸,所以 $\vec{A}_1,\cdots,\vec{A}_r$ 线性无关.(例5.8)

同理,A 的前 r 个列向量 $\vec{A}^{(1)},\cdots,\vec{A}^{(r)}$ 也线性无关.

(3分)

"$\Leftarrow$" 常见错误:

$$\phi:\ \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{r,i} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{r,i} \\ a_{r+1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix},\ i=1,\cdots,r.$$ 说 ϕ 是一个线性映射 ✗

ϕ 不是良定义的. 比如 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, 不是良定义.

因为 $\mathrm{rank}(A)=r$,所以 $V_r(A)=r$. 因为 $\vec{A}_1,\cdots,\vec{A}_r$ 线性无关,所以 $\vec{A}_1,\cdots,\vec{A}_r$ 是 $V_r(A)$ 的一组基. 故对任意 $i\in\{r+1,\cdots,m\}$,存在 $\alpha_{i,1},\cdots,\alpha_{i,r}\in\mathbb{R}$,使得

$$\vec{A}_i=\alpha_{i,1}\vec{A}_1+\cdots+\alpha_{i,r}\vec{A}_r.$$

故通过初等行变换,A 可变为

$$D=\begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_r \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix}.$$

因为行变换不改变列的线性无关性，所以列向量 $\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(r)}$ 线性无关蕴含 $\vec{D}^{(1)},\dots,\vec{D}^{(r)}$ 线性无关. 但

$$(\vec{D}^{(1)},\cdots,\vec{D}^{(r)}) = \begin{pmatrix} B \\ O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$$

则 $\operatorname{rank}((\vec{D}^{(1)},\dots,\vec{D}^{(r)})) = r$，则 $\operatorname{rank}(B) = r$.

$\square$.

错误，直接对 A 作初等行变换.

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left.\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & * & \cdots & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & * & \cdots & * \end{matrix}\right\} r\text{行} \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad 0 \quad}_{r\text{列}} & & & 0 & & \end{matrix} \end{pmatrix}\right\} \text{这里没问题}$$

则

$$B \xrightarrow{\text{相同的初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & * \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \times$$

A 是 m 行的，B 是 r 行的，怎么用相同的初等行变换？

线性映射基本定理：

$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^m$的线性映射和$m\times n$阶实矩阵存在一一对应.

$$\Phi: \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$$
$$\phi \longmapsto A_\phi = (\phi(\vec{e}_1),\cdots,\phi(\vec{e}_n))$$

$$\Psi: \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$$
$$A \longmapsto \phi_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{e}_i \longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{A}^{(i)}$$
$$A = (\vec{A}^{(1)},\cdots,\vec{A}^{(n)})$$

保持加法： $\phi_A+\phi_B=\phi_{A+B}$

保持数乘： $\lambda\phi_A=\phi_{\lambda A}$.

保持乘法： $\phi_A\circ\phi_B=\phi_{AB}$.

关于矩阵运算的一些公式：假设下列A,B,C都是符合规模：

1. $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$ （命题6.22）
2. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$, $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$, $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$. （6.3节）
3. $A\cdot(\lambda B)=\lambda AB$ （直接验证）.
4. $(AB)C=A(BC)$
5. 矩阵乘法没有交换律☆ （例6.19）
6. $(AB)^t=B^tA^t$ （命题6.23）
7. $(A+B)^t=A^t+B^t$ （作业题）, $(\lambda A)^t=\lambda A^t$

设 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ 且可逆.

$$\left.\begin{array}{l} (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \\ \text{定义: } AA^{-1} = A^{-1}A = E_n. \\ (A^{-1})^{-1} = A \\ (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \end{array}\right\} \text{命题7.18}$$

$\lambda \neq 0$, $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

作业题(2)(3).

秩不等式: 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$, 则

(i) $rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$ (例6.13).

(ii) $rank(AB) \leq min(rank(A), rank(B))$

(iii) $rank(A) + rank(B) - s \leq rank(AB)$ (Sylvester 不等式)

推论: $rank(A) + rank(B) - s \leq rank(AB) \leq min(rank(A), rank(B))$

当 $rank(A) = s$ 时, 有 $rank(AB) = rank(B)$.

当 $rank(B) = s$ 时, 有 $rank(AB) = rank(A)$.

即左乘一个列满秩矩阵不改变矩阵的秩.

右乘一个行满秩矩阵不改变矩阵的秩.

☆ (左、右)乘以一个可逆矩阵不改变矩阵的秩.

作业题(4).

第十周习题

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},$$

计算: (a) A^2, A^3. (b) A^k.

解: (a) 可以验证

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned}A^3&=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^2&0\\0&1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&0\\-2^2+1&1^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\-3&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^3&=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^3&0\\0&1^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&0\\-2^3+1&1^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\-7&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) $A^k=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&0\\0&1^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&0\\-2^k+1&1\end{pmatrix}.$

2. (1) 设 $B,C\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 证明: $(B+C)^t=B^t+C^t$.

(2) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 证明: 存在 $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 满足

(a) $A=B+C$;

(b) $B^t=B$, $C^t=-C$.

(注: 也就是说证明任意一个方阵都可以写成一个对称矩阵和一个斜对称矩阵的和.)

证明: (a) 设

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mn}\end{pmatrix},$$

则

$$B^t = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}, C^t = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & \cdots & c_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}(B+C)^t &= \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}+c_{m1} & b_{m2}+c_{m2} & \cdots & b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & \cdots & b_{m1}+c_{m1} \\ b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{m1}+c_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n}+c_{1n} & \cdots & b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix} = B^t + C^t.\end{aligned}$$

(b) 令 $B = \frac{A+A^t}{2}$, $C = \frac{A-A^t}{2}$, 则 $A = B + C$, 且

$$B^t = \left(\frac{A+A^t}{2}\right)^t = \frac{A^t + (A^t)^t}{2} = \frac{A^t + A}{2} = B,$$

$$C^t = \left(\frac{A-A^t}{2}\right)^t = \frac{A^t - (A^t)^t}{2} = \frac{A^t - A}{2} = -C.$$

3. 设 $A \in \mathbb{R}^n$ 可逆, 证明:

   (a) 如果 A 对称, 则 A^{-1} 也对称.

   (b) 如果 A 斜对称, 则 A^{-1} 也斜对称.

证明: (a) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$, 所以 A^{-1} 是对称矩阵.

(b) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$, 所以 A^{-1} 是斜对称矩阵.

4. 设 $A \in \mathbb{R}^n$, 证明:

   (a) 若 $A^2 = \mathbf{0}$, 则 $\operatorname{rank}(A) \le \frac{1}{2}n$.

   (b) 若 $A^3 = \mathbf{0}$, 则 $\operatorname{rank}(A) \le \frac{2}{3}n$.

(tip: 利用定理 6.24.)

证明: (a) 根据 Sylvester 不等式, 有 $\text{rank}(A^2) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(A) - n$. 又因为 $A^2 = O$, 所以 $\text{rank}(A^2) = 0$, 则

$$0 \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(A) - n.$$

所以 $\text{rank}(A) \leq \frac{1}{2}n$.

(b) 根据 Sylvester 不等式, 有

$$\text{rank}(A^3) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(A^2) - n \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(A) + \text{rank}(A) - 2n.$$

又因为 $A^3 = O$, 所以 $\text{rank}(A^3) = 0$, 则

$$0 \geq 3 \cdot \text{rank}(A) - 2n.$$

所以 $\text{rank}(A) \leq \frac{2}{3}n$.

1. 秩不等式
2. 初等矩阵.

1. 秩不等式

定理6.24 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$, 则

(i) $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$

(ii) $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - s \leq \text{rank}(AB)$ (Sylvester 不等式)

推论: $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - s \leq \text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$

~~当 rank(A) = s 或 rank(B) = s 时, 有~~

当 $\text{rank}(A) = s$ 时, 有

$$\text{rank}(B) \leq \text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)) \leq \text{rank}(B)$$

所以 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$.

(左,右) 乘以一个可逆矩阵不改变矩阵的秩 ☆

当 $\text{rank}(B) = s$ 时, 有

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)) \leq \text{rank}(A)$$

所以 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$

注: 左乘一个列满秩矩阵不改变矩阵的秩
右乘一个行满秩矩阵不改变矩阵的秩