1. (i) $f(A)=A^2-2E=2A-E-2E=2A-3E$

(ii) $f(B)=B^2-2E=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&-1\end{pmatrix}$

~~解~~ 由于 B 不是数乘算子，故 μ_B 不是一次的，至少为 2次

设 $\mu_B(t)=t^2+\alpha_1 t+\alpha_0$, $\alpha_1,\alpha_0\in F$

由 $B^2+\alpha_1 B+\alpha_0 E=0$，故 $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_0+1&\alpha_1+2\\0&\alpha_1+\alpha_0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1+1=0\\ \alpha_1+2=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha_0=1\\ \alpha_1=-2\end{cases}$$

$\Rightarrow \mu_B=t^2-2t+1$

2. 解：$J_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$J_2^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$M=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$.

由 J_2 不是数乘矩阵，故 μ_{J_2} 的次数 ≥ 2，故 $\mu_{J_2}=t^2$

$\mu_A=\operatorname{lcm}(\mu_{J_2},\mu_0)=\operatorname{lcm}(t^2,t)=t^2$.

$\mu_B=\operatorname{lcm}(\mu_{J_2},\mu_E)=\operatorname{lcm}(t^2,t-1)=t^2(t-1)$

$\mu_M=\operatorname{lcm}(t-2,t)=t(t-2)$

$\mu_C=\operatorname{lcm}(\mu_{J_2},\mu_M)=\operatorname{lcm}(t^2,t(t-2))=t^2(t-2)$

3. Pf: $BA=A^{-1}(AB)A$, $A\in GL_n(F)$. 故 $BA\sim_s AB$

令 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

假设 $AB\sim_s BA$，故 $\exists P\in GL_n(F)$, s.t $P^{-1}ABP=BA$

$\Rightarrow ABP=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

设 $P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $\Rightarrow\begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow c=d=0$

$\Rightarrow P\notin GL_n(F)$

4. Pf: $\forall\vec{x}\in V_1+\cdots+V_m$

$\exists\vec{x_i}\in V_i$, s.t $\vec{x}=\sum_{i=1}^m\vec{x_i}$

$A\vec{x}=A(\sum_{i=1}^m\vec{x_i})=\sum_{i=1}^m A\vec{x_i}$

由于 V_i 是 A-不变子空间 故 $A\vec{x_i}\in V_i$

$\Rightarrow$ $A\vec{x}\in V_1+\cdots+V_m$

$\Rightarrow V_1+\cdots+V_m$ 是 A 的不变子空间

同理，$V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_m$ 是 A 的不变子空间

5. pf: $\forall \vec{x} \in \ker(\lambda\varepsilon - A)$,

则 $\lambda\vec{x} = A\vec{x}$.

$(\lambda\varepsilon - A)(B\vec{x}) = \lambda B\vec{x} - AB\vec{x} = \lambda B\vec{x} - BA\vec{x} = \lambda B\vec{x} - \lambda B\vec{x} = \vec{0}$.

$\Rightarrow B\vec{x} \in \ker(\lambda\varepsilon - A)$

$\Rightarrow$ 对 $\forall \lambda \in K$, $\ker(\lambda\varepsilon - A)$ 是 B 的不变子空间.

6. pf: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 正定，故 $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$, s.t $A = P^tP$, $B = Q^tQ$

$AB = P^tPQ^tQ$, $\quad AB \sim_s (P^t)^{-1} P^tPQ^tQ\, P^t$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\parallel}{PQ^tQP^t} = (QP^t)^t\, QP^t$

由 $\det(QP^t) = \det(Q)\det(P^t) = \det(Q)\det(P) \neq 0$

故 $QP^t \in GL_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow AB$ 相似于一个正定矩阵.

期中复习

(抽象线性空间)

Def $(V, +, \vec{0})$ 交换群，F 域，数乘：$F \times V \to V$ 满足

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha\vec{v}$.

① $\forall \alpha, \beta \in F, \vec{v} \in V$, $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

② $\forall \vec{v} \in V$, $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

③ $\forall \alpha, \beta \in F$, $\vec{v} \in V$, $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

④ $\forall \alpha \in F$, $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

(③④ 分配律.)

则称 V 是域 F 上的线性空间

例 坐标空间，矩阵空间，代数空间，映射空间

子空间 $W \subseteq V$, 非空，W 是 V 的子空间 $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in F, \vec{x}, \vec{y} \in W$, 有 $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W$.

例. $\phi: V_1 \to V_2$, $\ker(\phi)$ 是 V_1 的子空间，$\mathrm{Im}(\phi)$ 是 V_2 的子空间

$\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ $\qquad$ $SM_n(F)$, $SSM_n(F)$ 是 $M_n(F)$ 的子空间.

prop. ① V_1, V_2 是 V 的子空间，$V_1 \cap V_2$，$V_1 + V_2$ 是 V 的子空间，

$V_1 \cup V_2$ 是 V 的子空间 $\Leftrightarrow$ $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$

② 维数公式 $\dim(V_1+V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$

子空间直和

V 是线性空间，$V_1, \cdots, V_k$ 是 V 的线性子空间．$V = V_1 \oplus V_2 + \cdots \oplus V_k$

$\Leftrightarrow$ 可分解性、

$\Leftrightarrow$ $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_k) = \{\vec{0}\}$.

$\Leftrightarrow$ $\dim V = \dim V_1 + \cdots + \dim V_k$.

例 ① $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，则 $\mathbb{R}^n = \langle \vec{u_1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{u_n} \rangle$

② $\mathrm{char}(F) \neq 2$, $SM_n(F) \oplus SSM_n(F) = M_n(F)$.

③ V 线性空间，$V_1, V_2, \cdots, V_k$ 子空间如果 $V_1 + \cdots + V_k$ 是直和 则对 $\forall l \in \{1, \cdots, k\}$, $V_l + \cdots + V_k$ 也是直和.

④ V 线性空间，V_1, V_2, V_3, V_4 是子空间，如果 $V = V_1 \oplus V_2$ 且 $V_1 = V_3 \oplus V_4$，则

$V = V_3 \oplus V_4 \oplus V_2$

线性映射

定义 $\phi: V \to W$ 满足 $\forall \alpha, \beta \in F$, $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\phi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\phi(\vec{u}) + \beta\phi(\vec{v})$.

性质 ϕ 单 $\Leftrightarrow$ $\ker(\phi) = \{\vec{0_v}\}$. ϕ 满 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{im}(\phi) = W$.

$\dim V = \dim \mathrm{im}\phi + \dim \ker\phi$

线性同构 = 线性映射 + 双射.

线性空间 $\mathrm{Hom}(F^n, F^m) \cong F^{m\times n}$

$\phi \longmapsto A_\phi$ （ϕ 在标准基下矩阵）

基扩充定理．V 是有限维线性空间，$S \subset V$ 是线性无关集，则 $\exists$ V 的一组基 T s.t $S \subset T$.

基变换与坐标变换

设 $\{\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}\}$ 与 $\{\vec{e_1}', \cdots, \vec{e_n}'\}$ 为 V 的两组基，

基变换，$\exists P \in GL_n(F)$, s.t $(\vec{e_1}', \cdots, \vec{e_n}') = (\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n})\boxed{P}$ → 过渡矩阵

坐标变换，$\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} = \alpha_1\vec{e_1} + \cdots + \alpha_n\vec{e_n} = \alpha_1'\vec{e_1}' + \cdots + \alpha_n'\vec{e_n}'$.

$$\vec{v} = (\vec{e_1}', \cdots, \vec{e_n}')\begin{pmatrix}\alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n'\end{pmatrix} = (\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n})P\begin{pmatrix}\alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n'\end{pmatrix}$$

$$= (\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n})\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} \Rightarrow P\begin{pmatrix}\alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n'\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

V,W是域F上的有限维线性空间，$V\cong W \Leftrightarrow \dim(V)=\dim(W)$

当$\dim_F(V)=n$，则$V\cong F^n$.

（利用线性映射基本定理II）设V的一组基是$\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n}$，$W$是$F$上的线性空间且$\vec{w_1},\cdots,\vec{w_n}\in W$，则存在唯一的线性映射$\phi: V\to W$，使得$\phi(\vec{v_1})=\vec{w_1},\cdots,\phi(\vec{v_n})=\vec{w_n}$.

线性映射的矩阵表示

$\phi\in \mathrm{Hom}(V,W)$，$\exists! A\in F^{n\times m}$，s.t $\forall \vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$，$\phi(\vec{x})$在$\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_m}$下的

坐标是 $\underset{m\times n}{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

A是ϕ在基底$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$和$\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_m}$下的矩阵表示

例 $\phi: \mathbb{R}[x]^{(n)}\to\mathbb{R}[x]^{(n)}$

$p\to\frac{dp}{dx}$. $\quad (\phi(1),\phi(x),\phi(x^2),\cdots,\phi(x^{n-1}))=(1,x,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&0&2&&\vdots\\ 0&\vdots&&\ddots&n-1\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$

ϕ在$1,x,\cdots,x^{n-1}$下的矩阵

双线性型

定义. V是域F上的n维线性空间，$f: V\times V\to F$
$(\vec{x},\vec{y})\mapsto f(\vec{x},\vec{y})$.

$\forall \alpha,\beta\in F$，$\vec{z}\in V$，$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{z},\vec{y})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{z},\vec{y})$.

$f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x},\vec{z})$.

定理 V一组基$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$，$f$是$V$上的双线性型，$\exists! A\in M_n(F)$，s.t

$\forall \vec{x}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$\vec{y}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$，有

$f(\vec{x},\vec{y})=(x_1,\cdots,x_n)\underbrace{A}_{(f(e_i,e_j))_{n\times n}}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

注：f是V上的双线性型，f在V上两组基$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$和$\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$下矩阵分别是$A,B$，

且$(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$，$P\in GL_n(F)$，则$B=P^tAP$.

注：双线性型在不同基底下的矩阵是合同的，而合同矩阵的秩相同

定义 $\mathrm{rank}(f):=\mathrm{rank}(A)$

对称双线性型

定义. $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$，$f(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{y},\vec{x})$，则称$f$是对称的.

定理 $\mathrm{char}(F)\neq 2$，$f\in\mathcal{L}_2^+(V)$，则V中有一组基，使得f在该基下矩阵是对角阵

矩阵语言：$A\in SM_n(F)$，A合同于一个对角阵.

$$A \sim_c \mathrm{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$$

对称矩阵化对角方法：$A \in SM_n(F)$

1. 降维法

2. 行列相伴变换. $(A|E) \longrightarrow (B|P)$，$P$ 满足 $P^tAP = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

要点 ① 看 A 的对角线元素 全为 0，则通过同时加行加列使 $a_{11} \neq 0$；不全为 0，则同时通过交换行列位置，使 $a_{11} \neq 0$.

② 把第一行和第一列除交叉位置 a_{11} 以外所元素全化为 0，然后以此类推

P来记下列变换.（对于矩阵 P）

3. 配方法 $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$

① 若 $\exists a_{ii} \neq 0$，设 $a_{11} \neq 0$，令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j, \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n. \end{cases}$

② 若 $\forall a_{ii} = 0$，$\exists a_{ij} \neq 0$，不妨设 $a_{12} \neq 0$，令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_i = y_i,\ i = 3, \cdots, n. \end{cases}$，再做 ① 步骤

注：P的所有列向量为 q 的规范基，在该基下的规范型为 $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$.

V是域F上有限维线性空间.

定义：$q: V \to F$

① $\forall \vec{v} \in V$, $q(\vec{v}) = q(-\vec{v})$

② $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$, $f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y}))$ 是 V 上对称双线性型，f 称为 q 的配极

$Q(V)$, $\mathcal{L}_2^+(V)$, $SM_n(F)$ 是线性同构

$Q(V) \longleftrightarrow \mathcal{L}_2^+(V) \longleftrightarrow SM_n(F)$

$q \mapsto f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y})) \longrightarrow A = (f(\vec{e_i}, \vec{e_j}))_{n \times n}$.

$\underset{f(\vec{x},\vec{x})}{q(\vec{x})} \longleftarrow f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t A \vec{y} \longleftarrow A = (a_{ij})_{n \times n}$.

V是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间

$A \in SM_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{rank}(A) = r$，则 $A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A \in SM_n(\mathbb{R})$, $A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ 0 & -E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，签名为 (k, l).

定义

半正定：$\forall \vec{x}\in V, q(\vec{x})\geq 0 \Leftrightarrow l=0$

正定：$\forall \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}, q(\vec{x})>0 \Leftrightarrow k=n$

半负定：$\forall \vec{x}\in V, q(\vec{x})\leq 0 \Leftrightarrow k=0$.

负定：$\forall \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}, q(\vec{x})<0 \Leftrightarrow l=n$.

不定：不是半正定，不是半负定 $\Leftrightarrow k>0, l>0$.

$q = \vec{x}^t A\vec{x}$，$A\in SM_n(\mathbb{R})$

q 半正定 $\Leftrightarrow$ A 半正定 $\Leftrightarrow l=0 \Leftrightarrow \exists B\in M_n(\mathbb{R})$, s.t $A=B^tB \Leftrightarrow \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n, \vec{x}^tA\vec{x}\geq 0$.

q 正定 $\Leftrightarrow$ A 正定 $\Leftrightarrow k=n \Leftrightarrow \exists P\in GL_n(\mathbb{R})$, s.t $A=P^tP \Leftrightarrow \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}, \vec{x}^tA\vec{x}>0$

$\Leftrightarrow$ A 的所有顺序主子式 >0

$\Leftrightarrow$ A 的所有主子式 >0.

q 负定 $\Leftrightarrow \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}, \vec{x}^tA\vec{x}<0 \Leftrightarrow (-1)^i\Delta_i>0, i=1,2,\cdots,n$.

注：A 正定 $\Rightarrow \det(A)>0$，A^i 正定.