第十一周习题课

——期中考试复习

上学期内容不专门考

一、第一章：空间与形式

1.1 线性空间

- 线性空间的定义
- 子空间的定义：非空子集 + 数乘、加法
- 线性相关性：设 V 是 F 上 n 维的线性空间，$e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基，设 $u_j=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}e_n$，$j=1,\cdots,s$，判断 $u_1,\cdots,u_s$ 的线性相关性.（特别地，$e_1,\cdots,e_n$ 是标准基，是上学期学的内容）.
- 子空间的生成元：

$$\langle S\rangle:=\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i \mid k\in\mathbb{Z}^+,\ \alpha_i\in F,\ v_i\in S\}.$$

若 $V=\langle S_1\rangle$，$W=\langle S_2\rangle$，$V+W=\langle S_1\cup S_2\rangle$.

- 基和维数：如果判断 $v_1,\cdots,v_n$ 是有限维线性空间的一组基？

① $V=\langle v_1,\cdots,v_n\rangle$ 且 V 中任意元素在 $v_1,\cdots,v_n$ 下表法唯一.

② $V=\langle v_1,\cdots,v_n\rangle$ 且 $v_1,\cdots,v_n$ 线性无关.

③ $V=\langle v_1,\cdots,v_n\rangle$ 且 $n=\dim V$.

④ $v_1,\cdots,v_n$ 线性无关且 $n=\dim V$.

基扩充定理：设 $v_1,\cdots,v_s$ 线性无关，则 $v_1,\cdots,v_s$ 可以扩充成 V 的一组基 $v_1,\cdots,v_s,v_{s+1},\cdots,v_n$.

命题 若 $V_1\subset V_2$，则 $\dim V_1\le\dim V_2$. 特别地，当 $\dim V_1=\dim V_2$ 时，$V_1=V_2$.

扫描全能王 创建

维数：V的基中元素的个数称为V的维数.

维数公式：$\dim U+\dim V=\dim(U+V)+\dim(U\cap V)$

对偶定理：$\dim(\ker\phi)+\dim(\mathrm{im}\,\phi)=\dim V$ （$\phi: V\to W$的线性映射）

$\dim(\mathrm{sol}(A))+\mathrm{rank}(A)=n$. （$A\in F^{m\times n}$）

当A是$\phi: V\to W$在某组基下的矩阵时，我们有

$$\dim(\ker\phi)=\dim(\mathrm{sol}(A))$$

$$\dim(\mathrm{im}\,\phi)=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\phi).$$

- 直和：设$V_1,\cdots,V_k$是V的子空间，以下结论等价.

(i) $W=V_1+V_2+\cdots+V_k$是直和，即对于任意$w\in W$，存在唯一的$v_1\in V_1,\cdots,v_k\in V_k$，使得$w=v_1+v_2+\cdots+v_k$.

(ii) 对于任意$i\in\{1,2,\cdots,k\}$.

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_k)=\{0\}.$$

(iii) 如果$0=v_1+v_2+\cdots+v_k$，$v_1\in V_1,\cdots,v_k\in V_k$，则

$$v_1=v_2=\cdots=v_k=0.$$

☆ (iv) $\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)=\dim(V_1+\cdots+V_k)$

☆ (vi) 设$v_{i1},\cdots,v_{is_i}$是V_i的一组基，$i=1,\cdots,k$，则

$$v_{11},\cdots,v_{1s_1},v_{21},\cdots,v_{2s_2},\cdots,v_{k1},\cdots v_{ks_k}$$

是$V_1+V_2+\cdots+V_k$的一组基.

- 商空间，线性映射基本定理I不考

- 线性映射：$\phi: V\longrightarrow W$.

(1) ϕ是单射$\Leftrightarrow\ker\phi=\{0\}$.

(2) ϕ是满射$\Leftrightarrow\mathrm{im}\,\phi=W$.

扫描全能王 创建

· 线性空间基本定理 II.

设 $v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的一组基, $w_1, \cdots, w_n$ 是 W 中任意 n 个元素, 则存在唯一的线性映射 ϕ, 使得 $\phi(v_i) = w_i$, $i=1, \cdots, n$.

具体来说, $\phi: V \longrightarrow W$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i w_i.$$

注: 该定理主要说了两层含义:

① 存在性: 不管 $w_1, \cdots, w_n$ 是 W 中什么元素, 该映射都存在.
($w_1, \cdots, w_n$ 不一定是基, 也可以重复)

② 唯一性: ϕ 由 $\phi(v_1), \cdots, \phi(v_n)$ 唯一确定.

· 坐标变换: 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的一组基, 则任意 $v \in V$, 存在唯一 $x_1, \cdots, x_n$, 使得

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = (e_1\ e_2 \cdots e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 称为 v 的坐标.

设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的另一组基, 则存在可逆矩阵 $P \in M_n(F)$, 使得 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (e_1 \cdots e_n) P$.

问题: 设 $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, 怎么算 v 在新的基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标?

设 $v = y_1 \varepsilon_1 + \cdots + y_n \varepsilon_n$, 则

$$y_1 \varepsilon_1 + \cdots + y_n \varepsilon_n = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

因为 $y_1 \varepsilon_1 + \cdots + y_n \varepsilon_n = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (e_1, \cdots, e_n) P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = (e_1, \cdots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

扫描全能王 创建

所以上述等式转化为

$$(e_1,\cdots,e_n)P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

所以 $P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$. 解得 $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

· 对偶空间不考.

1.2 双线性型

· 双线性型的定义.

· 双线性型在一组基下的矩阵:

设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基, 则双线性型 f 在 $e_1,\cdots,e_n$ 下的矩阵为 $A=(f(e_i,e_j))_{n\times n}$.

设 $X=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$, $Y=y_1e_1+\cdots+y_ne_n$. 若

$$f(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

则 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 f 在 $e_1,\cdots,e_n$ 下的矩阵.

· 双线性型在不同基下的矩阵.

设 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(e_1,\cdots,e_n)P$ 是 V 的另一组基, 则 f 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 P^tAP.

证明: 设 $X=x_1e_1+\cdots+x_ne_n=u_1\varepsilon_1+\cdots+u_n\varepsilon_n$. 则 $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}$

$Y=y_1e_1+\cdots+y_ne_n=v_1\varepsilon_1+\cdots+v_n\varepsilon_n$, 则 $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$

则 $f(X,Y)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$=(u_1,\cdots,u_n)P^tAP\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$, 所以 P^tAP 是 f 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵

扫描全能王 创建

· 对称双线性型：f 在基下的矩阵是对称矩阵.

定理. 设 F 的特征不为 2（比如 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$），则对于任意的对称双线性型 f，存在 V 的一组基，使得 f 在这组基下的矩阵为对角矩阵.

矩阵版本：对于任意对称矩阵 A，存在可逆矩阵 P，使得 P^tAP 是对角矩阵.

问题：给定对称矩阵 $A \in M_n(\mathbb{Q})$，计算可逆矩阵 P，使得 $P^tAP = D$ 是对角矩阵.

1.3 二次型.

· 二次型的定义.

· 二次型的判定：$q(X)$ 是二次型当且仅当存在对称双线性 $f(X,Y)$，使得 $q(X) = f(X,Y)$.

· 二次型标准型下的矩阵. 设

$$q(X) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_1x_3$$
$$= (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

则 $q(X)$ 在标准基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

· 二次型的规范型和规范基.

计算规范型和规范基的方法：

① 降维法

② 行列相伴变换（消元法）

③ 配方法（变量替换法）

扫描全能王 创建

1.4 实二次型

由于 $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\geq 0$, $\sqrt{x}$ 存在，所以任意实对称矩阵 A，存在可逆矩阵 P，使得

$$P^tAP=\begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

称 (s,t) 为 A 的签名。

定理 A 的签名由 A 唯一确定。(证明)

二次型版本：设 q 是实二次型，则存在 q 的一组规范基，使得 q 在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

即规范型为 $x_1^2+\cdots+x_s^2-x_{s+1}^2-\cdots-x_{s+t}^2$.

- 正定矩阵、半正定矩阵、负定矩阵

正定矩阵的等价描叙：$A\in SM_n(\mathbb{R})$

① $\forall X\in\mathbb{R}^n$, $X\neq 0$, 有 $x^tAx>0$.

② A 的签名为 $(n,0)$

③ 存在可逆矩阵 P，使得 $P^tAP=E_n$.

④ 存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^tP$.

⑤ A 的所有顺序主子式大于 0.

负定矩阵：A 是负定矩阵 $\Leftrightarrow$ $-A$ 是正定矩阵.

扫描全能王 创建

半正定矩阵的等价描叙：$A\in SM_n(\mathbb{R})$.

① $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $x^tAx\geq 0$.

② A 的签名为 $(s,0)$, $s\leq n$.

③ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^tAP=\begin{pmatrix}E_s & \\ & 0\end{pmatrix}$.

④ 存在矩阵 $Q\in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $A=Q^tQ$.

二、线性映射与线性算子.

- 线性映射与线性算子的定义.
- 线性映射与线性算子在一组基下的矩阵.
- 计算线性映射（算子）的 $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的基, $\mathrm{rank}(\phi)$.

扫描全能王 创建