1. 解

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_{2,1}(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&0&2&-1&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_{2,3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&2&1&0&0&1\\0&0&2&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3(\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&2&1&0&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_{2,3}(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&2&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2(\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{1,2}(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{array}\right).$$

$M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

2. 解: 设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则 $J=\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}M&0\\0&N\end{pmatrix}J=\begin{pmatrix}M&0\\0&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}MA&MB\\0&NC\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$J\begin{pmatrix}M&0\\0&N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M&0\\0&N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AM&AN\\0&CN\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

3. 证明: ①

$$\begin{pmatrix}E_r\\O_{(m-r)\times r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r&O_{r\times(n-r)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r\cdot E_r&E_r\cdot O_{r\times(n-r)}\\O_{(m-r)\times r}E_r&O_{(m-r)\times r}O_{r\times(n-r)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r&O_{r\times(n-r)}\\O_{(m-r)\times r}&O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}$$

② 由打洞引理可知, ∃可逆矩阵 $P\in M_m(\mathbb{R})$, $Q\in M_n(\mathbb{R})$, s.t.

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r&O_{r\times(n-r)}\\O_{(m-r)\times r}&O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r\\O_{(m-r)\times r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r&O_{r\times(n-r)}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix}E_r\\O_{(m-r)\times r}\end{pmatrix}}_{=B}\underbrace{\begin{pmatrix}E_r&O_{r\times(n-r)}\end{pmatrix}Q^{-1}}_{=C}$$

令 B, C.

易知 $\mathrm{ran}(B)=r$, $\mathrm{rank}(C)=r$.

$X=\begin{pmatrix}A&B\\0&D\end{pmatrix}$ $\mathrm{rank}(X)\geq\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(D)=m+n$

$X\in M_{m+n}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow \mathrm{rank}(X)\leq m+n$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(X)=m+n$

$\Rightarrow X$ 可逆

4. 解:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}E_m&-BD^{-1}\\0&E_n\end{pmatrix}}_{P}X=\begin{pmatrix}E_m&-BD^{-1}\\0&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\0&D\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}A&0\\0&D\end{pmatrix}}_{Q}$$

$$\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&D^{-1}\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}E_m&\\&E_n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&D^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m&-BD^{-1}\\0&E_n\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}E_m&\\&E_n\end{pmatrix}$$

注意到 P, $\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&D^{-1}\end{pmatrix}$ 可逆

从而, X 可逆, 且

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&D^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m&-BD^{-1}\\0&E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}BD^{-1}\\0&D^{-1}\end{pmatrix}$$

①

5. 证明：由 Sylvester 降阶公式可知，

$$\mathrm{rank}(E_n+AB)+n=\mathrm{rank}(E_m+BA)+n.$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(E_n+AB)=\mathrm{rank}(E_m+BA).$$

E_n+AB 可逆 $\Rightarrow$ E_n+BA 可逆.

6. pf：(a) 证明：

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

$$AA^t=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}^2 & * & \cdots & * \\ & \sum_{j=1}^n a_{2j}^2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \sum_{j=1}^n a_{nj}^2 \end{pmatrix}$$

$$tr(AA^t)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \quad \Rightarrow tr(AA^t)\geq 0$$

注意到 $a_{ij}\in\mathbb{R}$.

$$tr(AA^t)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2=0 \Leftrightarrow a_{ij}^2=0,\ \forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\} \Leftrightarrow a_{ij}=0,\ \forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\}.$$

(b).

$$XX^t=\begin{pmatrix} A & C \\ O_{k\times n} & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^t & O_{n\times k} \\ C^t & B^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AA^t+CC^t & CB^t \\ BC^t & BB^t\end{pmatrix}$$

$$X^tX=\begin{pmatrix} A^t & O_{n\times k} \\ C^t & B^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ O_{k\times n} & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^tA & A^tC \\ C^tA & C^tC+B^tB\end{pmatrix}.$$

$$XX^t=X^tX \Rightarrow AA^t+CC^t=A^tA$$

$$\Rightarrow tr(AA^t+CC^t)=tr(A^tA).$$

$$\| \quad tr(AA^t)+tr(CC^t)$$

又由 $tr(AA^t)=tr(A^tA)$ $\Rightarrow tr(CC^t)=0$.

设 $C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk}\end{pmatrix}$, $CC^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k a_{1j}^2 & & * \\ & \sum_{j=1}^k a_{2j}^2 & \\ & \ddots & \\ * & & \sum_{j=1}^k a_{nj}^2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow tr(CC^t)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k a_{ij}^2$, $tr(CC^t)=0 \Leftrightarrow a_{ij}=0,\ i\in\{1,\cdots,n\},\ j\in\{1,\cdots,k\}$

$\Rightarrow C=O$

2

行列式定义与性质

Def. 设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$. $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$

Prp ① 交换 A 中两个不同的行(列)，得到新矩阵 B，则 $\det(B)=-\det(A)$

② A 中某行(列)的倍式加到另一列，得到新矩阵 B，则 $\det(B)=\det(A)$.

③ 如果 A 中有两列相同，则 $\det(A)=0$.

④ 如果 A 的某列是其他列的线性组合，则 $\det(A)=0$.

⑤ $\det(A)\neq 0 \iff A$ 可逆.

⑥ A 为三角方阵，则 $\det(A)$ 为对角线元素之积

eg. $A=\begin{pmatrix} & & a_{1,n}\\ & \iddots & a_{2,n-1}\\ a_{n,1} & & \end{pmatrix}$，求 $\det(A)$ （根据行列式的定义）

解：$|A|=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$

当 $(i,j)\neq(k,n+1-k)$，其 $k=1,2,\cdots,n$ 时，$a_{ij}=0$

$\Rightarrow |A|=\varepsilon_\sigma a_{n,1}a_{n-1,2}\cdots a_{1,n}$，其中 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\ n&n-1&\cdots&\cdots&1\end{pmatrix}$.

$\varepsilon_\sigma=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\Rightarrow |A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{n,1}a_{n,2}\cdots a_{1,n}$

计算行列式 $\det\begin{pmatrix}-2&3&1\\503&201&298\\5&2&3\end{pmatrix}$ 于，

$$\det\begin{pmatrix}-2&3&1\\503&201&298\\5&2&3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-2&3&1\\500+3&200+1&300-2\\3&2&3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-2&3&1\\500&200&300\\5&2&3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}-2&3&1\\3&1&-2\\5&2&3\end{pmatrix}$$

$$=0+\det\begin{pmatrix}-2&3&1\\3&1&-2\\5&2&3\end{pmatrix}$$

$$=0+\det\begin{pmatrix}1&4&-1\\3&1&-2\\5&2&3\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}1&4&-1\\0&-11&1\\0&-18&8\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}1&-1&4\\0&1&-11\\0&8&-18\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}1&-1&4\\0&1&-11\\0&0&70\end{pmatrix}$$

$=-1\cdot1\cdot70=-70$ ③

一个n阶行列式若它的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}$, $i,j=1,2,\cdots,n$, 则称为反(斜)对称行列式

① 证明：奇数阶反对称行列式为0.

② 证明：偶数阶反对称矩阵A, 若 $B=(a_{ij}+b)_{n\times n}$, 则 $|A|=|B|$.

解：① 由 $a_{ij}=-a_{ji}$ 可得 $a_{ii}=0, \forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$, $i\neq j$ 时, $a_{ij}=-a_{ji}$

$\Rightarrow A^t=-A$

$\Rightarrow \det(A^t)=\det(-A)$

$\Rightarrow \det(A)=(-1)^n\det(A)=-\det(A)$

$\Rightarrow \det(A)=0 \quad (\because 2\neq 0)$

② 回忆：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij}为A去掉第i行第j列之后的矩阵的行列式

行列式按某一行或某一列展开,

$\det(A)=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}$ (按行展开)

$=a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$ (按列展开)

技巧：加边法

$$\det(B)=\begin{vmatrix} b & a_{12}+b & a_{13}+b & \cdots & a_{1n}+b \\ -a_{12}+b & b & a_{23}+b & \cdots & a_{2n}+b \\ -a_{13}+b & -a_{23}+b & b & \cdots & a_{3n}+b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}+b & -a_{2n}+b & \cdots & & b \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{一列}]{\text{加一行}} \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & b & a_{12}+b & \cdots & a_{1n}+b \\ 0 & -a_{12}+b & b & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & -a_{1n}+b & \cdots & & b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[(i=2,3,\cdots,n+1)]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1+0 & 0+b & 0+b & \cdots & 0+b \\ -1 & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & -a_{12} & 0 & a_{23}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -a_{1n} & \cdots & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -a_{1n} & \cdots & & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} + \begin{vmatrix} 0 & b & \cdots & & b \\ -1 & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & -a_{12} & 0 & a_{23}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -a_{1n} & \cdots & & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

(按第一行展开)

$$=\det(A)+b\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ -1 & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -a_{1n} & \cdots & & 0 \end{vmatrix}=\det(A).$$

$=0$ (由①).

例 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $\det(A)\triangleq d$, 则

$$a_{k1}A_{i1}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} d, & k=i \\ 0 & k\neq i \end{cases}, \qquad a_{1k}A_{1j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}=\begin{cases} d, & k=i \\ 0, & k\neq i \end{cases}$$

附: 若 $k=i$, 则按第 i 行展开, $d=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

若 $k\neq i$, $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij}=\begin{array}{c|cccc|l} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & \to k \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & \to i \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \end{array} = 0$

同理可得, $a_{1k}A_{ij}+\cdots+a_{nk}A_{nj}=\begin{cases} d, & k=i \\ 0, & k\neq i \end{cases}$

通过递推关系求行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & \cdots & a \\ -a & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \\ -a & -a & \cdots & \cdots & & x \end{vmatrix}, \quad a\neq 0$$

解: ① 当 $n=1$ 时, $D_1=x$,

当 $n\geq 2$ 时, $D_n \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ -(x+a) & x & a & \cdots & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[\text{列展开}]{\text{按第1}} (x-a)D_{n-1} + (x+a)\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$= (x-a)D_{n-1} + (x+a)\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ 0 & x+a & \cdots & 2a \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & x+a \end{vmatrix}$

$= (x-a)D_{n-1} + a(x+a)^{n-1}$.

注意到将 a 用 $-a$ 替换, 行列式不变, 故

$$D_n=(x+a)D_{n-1}+(-a)(x-a)^{n-1}$$

$\begin{cases} D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x+a)^{n-1} & ① \\ D_n=(x+a)D_{n-1}-a(x-a)^{n-1} & ② \end{cases}$ $(x+a)① - (x-a)②$, 得. $2aD_n=a(x+a)^n+a(x-a)^n$

$\Rightarrow D_n=\dfrac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$, $\forall n\in N_+$.

例. 整数 1798, 2139, 3255, 4867 可以被 31 整除, 证明 4阶行列式

$$\underset{\det(A)}{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}} \xlongequal[100r_2+10r_3+r_4]{1000r_1+} \underset{\det(B)}{\boxed{\begin{vmatrix} 1798 & 7 & 9 & 8 \\ 2139 & 1 & 3 & 9 \\ 3255 & 2 & 5 & 5 \\ 4867 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}}} \Big/ 1000,$$

$\Rightarrow \det(B) = 1000\det(A)$

$31 \mid \det(B)$, $31 \nmid 1000 \Rightarrow 31 \mid \det(A)$.

31是素数.

利用分块矩阵来证明矩阵的秩的不等式

回忆: 引理10.7) 设矩阵 M 具有以下4种分块形式之一

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}.$$

则 $\operatorname{rank}(M) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$, 当 $C=0$ 时, 等号成立

例 $\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \leq \operatorname{rank}(ABC) + \operatorname{rank}(B)$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$.

证 利用分块矩阵 $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}$,

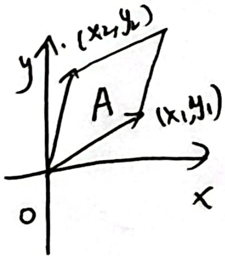
$$\begin{pmatrix} E_m & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & BC \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & BC \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_p & -C_{p\times q} \\ 0 & E_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(ABC) = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}\right) \geq \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC)$$

行列式的几何意义.

$n=2$.



$\vec{a} = (x_1, y_1)$

$\vec{b} = (x_2, y_2)$

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |a|\cdot|b|\,|\cos\theta| = |x_1x_2 + y_1y_2|$.

$$(|\vec{a}||\vec{b}|\,|\sin\theta|)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2|\cos\theta|^2$$
$$= (x_2^2+y_2^2)(x_1^2+y_1^2) - (x_1x_2+y_1y_2)^2$$
$$= (x_2^2y_1^2 + y_2^2x_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2)$$
$$= (x_2y_1 - y_2x_1)^2$$

$\Rightarrow$ 平行四边形面积 $= |x_2y_1 - y_2x_1| = \left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right|$