第十一次习题课

一. 初等矩阵与可逆矩阵

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow F_{i,j}^{(n)} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad\quad i & \quad j \end{matrix} & \end{array}$$

$$\longrightarrow F_{i,j}^{(n)} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & \cdots & \alpha & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad\quad i & \quad j \end{matrix} & \end{array}$$

$$\longrightarrow F_i^{(n)}(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ i \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

命题1. 左乘一个初等矩阵相当于做相应的行变换

右乘一个初等矩阵相当于做相应的列变换. (P17).

习题2.

$$\begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命题2. 初等矩阵都是可逆的.

$$F_{i,j}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(F_{i,j}^{(n)}(\alpha)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & \alpha \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{array}{c} \hspace{4em} j \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & -\alpha \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = F_{i,j}^{(n)}(-\alpha)$$

$$F_i(\alpha)^{-1} = \begin{array}{c} \hspace{2em} i \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha^{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = F_i(\alpha^{-1})$$

命题3. 可逆矩阵的乘积还是可逆矩阵，特别的，初等矩阵的乘积是可逆矩阵. 反过来，可逆矩阵都可以写成初等矩阵的乘积.

打洞引理　设 $A \in R^{m\times n}$，则存在可逆矩阵 $P \in M_m(\mathbb{R})$，$Q \in M_n(\mathbb{R})$，使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}, \quad r = \operatorname{rank}(A).$$

习题3. (i) 直接验证.

(ii) 见答案.(稍微解释一下为什么 $\text{rank}(B)=\text{rank}(C)=r$)

可逆矩阵的等价描叙:

$A\in M_n(\mathbb{R})$, 则

A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在 $B\in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB=BA=E_n$. (定义)

$\Leftrightarrow$ 存在 $B\in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB=E_n$ 或 $BA=E_n$ (推论 7.16)

$\Leftrightarrow$ A 满秩, 即 $\text{rank}(A)=n$. $\Leftrightarrow \cdots$

$\Leftrightarrow$ A 可以写成初等矩阵之积

$\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$.

矩阵求逆: 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 可逆, 则 A 可以通过初等行变换化为 E_n, 即存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_k$, 使得

$$(P_k\cdots P_2P_1)A=E_n, \text{ 则 } P=P_k\cdots P_1=A^{-1}.$$

考虑矩阵:

$$(A\mid E_n)_{n\times(2n)}$$

根据分块矩阵的乘法, 有

$$\begin{aligned}P_k\cdots P_2P_1(A\mid E_n)&=(P_k\cdots P_2P_1A\mid P_k\cdots P_2P_1)\\&=(E_n\mid P_k\cdots P_2P_1)\\&=(E_n\mid A^{-1})\end{aligned}$$

结论: 当 A 可逆时, 把矩阵 $(A\mid E_n)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E_n\mid P)$

则 $P=A^{-1}$.

习题1. 见答案.(例9.3)

另一种求逆方法(不讲).

讲义中还介绍了

$$0.1.\ (a_1, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

$$0.2.\ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}(b_1, \cdots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_1 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}$$

2. 分块矩阵的乘法

$a_i \in \mathbb{R}$, $\vec{\alpha}_i \in \mathbb{R}^{m\times 1}$

$$1.\ (\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2 \cdots \vec{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\vec{\alpha}_1 + a_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + a_n\vec{\alpha}_n \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad ☆$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$2.\ (b_1\ b_2 \cdots b_m)\begin{pmatrix} \vec{\beta}_1 \\ \vec{\beta}_2 \\ \vdots \\ \vec{\beta}_m \end{pmatrix} = b_1\vec{\beta}_1 + b_2\vec{\beta}_2 + \cdots + b_n\vec{\beta}_m \in \mathbb{R}^{1\times n}.$$

$b_i \in \mathbb{R}$, $\vec{\beta}_i \in \mathbb{R}^{1\times n}$

$$(1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 1\cdot(1\ 2) + 0\cdot(3\ 4) + 1\cdot(5\ 6) = (6\ 8)$$

$$3.\ A_{m\times s}(B_1 \cdots B_q)_{s\times n} = (AB_1, \cdots, AB_q)$$

$$4.\ \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}_{m\times s}(B_1, \cdots B_q)_{s\times n} = \begin{pmatrix} A_1B_1, & \cdots, & A_1B_q \\ \vdots & & \\ A_pB_1, & \cdots, & A_pB_q \end{pmatrix}$$

$$5.\ (A_1, \cdots, A_k)_{m\times s}\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix}_{s\times n} = A_1B_1 + \cdots + A_kB_k.$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 \end{array}\right)}_{s}\left.\begin{pmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \\ \hline B_3 \end{pmatrix}\right\}s = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3.$$

6. $$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l,1} & \cdots & A_{l,k} \end{pmatrix}_{m\times s} \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k,1} & \cdots & B_{k,p} \end{pmatrix}_{s\times n}.$$

A的列分割和B的行分割相同即可，主要看矩阵规模能否对上.

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{6\times 3} \left(\begin{array}{cc:ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{3\times 5}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2和习题6(a)（不讲）

分块矩阵的"初等变换"(以四个分块的矩阵为例)

设 $X = \left(\begin{array}{c|c} A_{r\times m} & B_{r\times n} \\ \hline C_{s\times m} & D_{s\times n} \end{array}\right)_{(r+s)\times(m+n)}$，则

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & O_{r\times s} \\ \hline P_{s\times r} & E_s \end{array}\right)_{(r+s)\times(r+s)} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_rA+O\cdot C & E_rB+O\cdot D \\ P\cdot A+E_s\cdot C & PB+E_s\cdot D \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ \underline{C+PA} & \underline{D+PB} \end{pmatrix} \leftarrow \text{左乘}.$$

不一定可逆

$$\begin{pmatrix} P_{r\times r} & O_{r\times s} \\ O_{s\times r} & E_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O_{s\times r} & E_s \\ E_r & O_{r\times s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & Q \\ O & E_n \end{pmatrix}_{(m+n)\times(m+n)} = \begin{pmatrix} A & \underline{AQ+B} \\ C & \underline{CQ+D} \end{pmatrix}$$

右乘.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AQ & B \\ CQ & D \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O_{m\times n} & E_m \\ E_n & O_{n\times m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$$

讲第4题. 有时间讲第6题第2问.

第十一周习题

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&2\\0&2&1\end{pmatrix},$$

计算 A^{-1}.

解:

$$(A\mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&0&2&-1&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&2&1&0&0&1\\0&0&2&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&2&1&0&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&2&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{array}\right).$$

2. 设 $M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 和 $N=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 计算

$$\begin{pmatrix}M&O\\O&N\end{pmatrix}J \text{ 和} J\begin{pmatrix}M&O\\O&N\end{pmatrix}.$$

解: 设 $J=\begin{pmatrix}A&B\\O&C\end{pmatrix}$, 其中 $A=C=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix}M&O\\O&N\end{pmatrix}J=\begin{pmatrix}M&O\\O&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\O&C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}MA&MB\\O&NC\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$J\begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AM & BN \\ O & CN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (矩阵的满秩分解) 设 $r > 0$.

(a) 证明:

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

(b) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(A) = r$. 证明: 存在 $B \in \mathbb{R}^{m\times r}, C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, 满足 $A = BC$, 且 B 列满秩和 C 行满秩.

证明: (a) 根据分块矩阵的乘法, 得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_r \cdot E_r & E_r \cdot O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} \cdot E_r & O_{(m-r)\times r} \cdot O_{r\times(n-r)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) 根据打洞引理, 存在可逆矩阵 $P \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

于是有

$$A = \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

令 $B = P^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}Q^{-1}$, 则 $A = BC$, 且 B 列满秩, C 行满秩.

4. 设 $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ 且可逆, $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 且可逆, 证明

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$$

可逆, 并求出 X^{-1}.

方法二: 设 $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} A^{(1)}, \cdots, A^{(n)} \end{pmatrix}$, 其中 $A^{(i)} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $i=1,\ldots,n$, 则

$$AA^t = \begin{pmatrix} A^{(1)}, \cdots, A^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{(1)})^t \\ \vdots \\ (A^{(n)})^t \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (A^{(j)}(A^{(j)})^t).$$

其中 $A^{(j)}(A^{(j)})^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 可以验证 $\operatorname{tr}(A^{(j)}(A^{(j)})^t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$ 所以

$$\operatorname{tr}(AA^t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{tr}(A^{(j)}(A^{(j)})^t) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$$

因为 $\operatorname{tr}(AA^t)=0$ 且 a_{ij} 为实数, 所以 $a_{ij}=0$, $i=1\ldots,n$, $j=1,\ldots,n$.

(b) 计算可得

$$XX^t = \begin{pmatrix} A & C \\ O_{k\times n} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^t & O_{n\times k} \\ C^t & B^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^t + CC^t & CB^t \\ BC^t & BB^t \end{pmatrix},$$

$$X^tX = \begin{pmatrix} A^t & O_{n\times k} \\ C^t & B^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O_{k\times n} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tA & A^tC \\ C^tA & C^tC + B^tB \end{pmatrix},$$

因为 $XX^t = X^tX$, 所以

$$AA^t + CC^t = A^tA,$$

两边同时取迹, 得

$$\operatorname{tr}(AA^t + CC^t) = \operatorname{tr}(A^tA)$$

由因为 $\operatorname{tr}(AA^t+CC^t) = \operatorname{tr}(AA^t) + \operatorname{tr}(CC^t)$, $\operatorname{tr}(AA^t) = \operatorname{tr}(A^tA)$ (命题 7.8), 所以得 $\operatorname{tr}(CC^t)=0$. 类似 (a) 的证明, 可得 $C=O$.