4.

(ii) $\Delta(1,x,x^2)=(1,x,x^2)\overbrace{\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}}^{A}$ $\quad$ $char(F)\neq 2,\ rank(A)=2$; $\quad char(F)=2,\ rank(A)=1$

(iii) 法一: $1\in ker(\Delta)\cap im(\Delta)$, 且 $dim(ker(\Delta))+dim(im(\Delta))=dim(F[x]^{(3)})=3$

从而 $ker(\Delta)+im(\Delta)$ 不是直和.

5. (i) 设 ϕ 是单射, 则 $V\cong im(\phi)$ 线性同构, 故 $dim(V)=dim(im(\phi))$.

$im(\phi)\subset W \Rightarrow dim(im(\phi))\leq dim(W)$

$\Rightarrow dim(V)\leq dim(W)$.

(ii) 设 ϕ 是满射, 则 $im(\phi)=W$. 故 $dim(im(\phi))=dim(W)$.

$dim(ker(\phi))+dim(W)=dim V \quad\Rightarrow\quad dim W\leq dim V$

(iii) "$\Rightarrow$" 设 $dim(V)=dim(W)$. 若 ϕ 是单射, 则 $V\cong im(\phi)$. 故 $dim(im(\phi))=dim(V)$

$\Rightarrow dim(im(\phi))=dim(W)$.

$\Rightarrow$ ϕ 是满射.

"$\Leftarrow$" 设 ϕ 是满射, 则 $dim(im(\phi))=dim(W)$, 由 $dim(ker(\phi))+dim W=dim V$

$\Rightarrow dim(ker(\phi))=0$.

$\Rightarrow$ ϕ 是单射.

6. (i) pf: 设 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d}$ 是 U 的一组基, 将其扩充成 V 的一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d},\vec{e_{d+1}},\cdots,\vec{e_n}$

由线性映射基本定理II, 存在 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 满足 $\mathcal{A}(\vec{e_1})=\vec{e_1},\cdots,\mathcal{A}(\vec{e_d})=\vec{e_d}$, $\mathcal{A}(\vec{e_{d+1}})=\vec{0},\cdots,\mathcal{A}(\vec{e_n})=\vec{0}$

$\Rightarrow im(\mathcal{A})=U$.

(ii) 再设 $\vec{\epsilon_1},\cdots,\vec{\epsilon_e}$ 是 W 的一组基, 由 $V=U\oplus W$,

故 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d},\vec{\epsilon_1},\cdots,\vec{\epsilon_e}$ 是 V 的一组基.

由线性映射基本定理II, 存在 $\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ 满足

$\mathcal{B}(\vec{e_1})=\cdots=\mathcal{B}(\vec{e_d})=\vec{0}$, $\mathcal{B}(\vec{\epsilon_1})=\vec{\epsilon_1},\cdots,\mathcal{B}(\vec{\epsilon_e})=\vec{\epsilon_e}$ ①

由(i)可知, $im(\mathcal{B})=W$

$U\subset ker(\mathcal{B})$. 设 $\vec{x}\in ker(\mathcal{B})$. 令

$\vec{x}=\alpha_1\vec{e_1}+\cdots+\alpha_d\vec{e_d}+\beta_1\vec{\epsilon_1}+\cdots+\beta_e\vec{\epsilon_e}$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_d,\beta_1,\cdots,\beta_e\in F$

$\mathcal{B}(\vec{x})=\beta_1\mathcal{B}(\vec{\epsilon_1})+\cdots+\beta_e\mathcal{B}(\vec{\epsilon_e})=\vec{0}$

$=\beta_1\vec{\epsilon_1}+\cdots+\beta_e\vec{\epsilon_e}=\vec{0}$

$\Rightarrow \beta_1=\cdots=\beta_e=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x}\in U$

$\Rightarrow U=ker(\mathcal{B})$.

7. Pf: "$\Leftarrow$" $\exists B\in\mathbb{R}^{r\times n}$, s.t. $A=B^tB$. 对 $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$\vec{x}^tA\vec{x}=\vec{x}^t(B^tB)\vec{x}=(B\vec{x})^tB\vec{x}\geq 0$$

$\Rightarrow$ A半正定.

"$\Rightarrow$" A半正定, 故 $\exists$ 可逆矩阵 P, s.t.

$$B=P^t\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P=P^t\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}(E_r\ 0)P$$

令 $B=(E_r\ 0)P$, 则 $\mathrm{rank}(B)=r$ 且 $A=B^tB$.

8. 证 (i)$\Rightarrow$(ii) 设 m是 q 的正惯性指数, 则 q 在 V 的一组基 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{2n}$ 下的规范型是

$$q(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_m^2-x_{m+1}^2-\cdots-x_{2n}^2$$

如果 $m>n$, 则存在非零向量 $\vec{u}\in\langle\epsilon_1,\cdots,\epsilon_m\rangle\cap U$, 则有

$$q(\vec{u})>0 \text{ 和 } q(\vec{u})=0$$

矛盾. 如果 $m<n$, 则 q 的负惯性指数 $2n-m>n$, 则存在非零向量

$$\vec{u}\in\langle\epsilon_{m+1},\cdots,\epsilon_{2n}\rangle\cap U.$$

则有 $q(\vec{u})<0$ 和 $q(\vec{u})=0$, 矛盾. 于是, $m=n$.

$$q(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_n^2-x_{n+1}^2-\cdots-x_{2n}^2$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) 由(ii)可知, q 有规范型

$$q(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_n^2-x_{n+1}^2-\cdots-x_{2n}^2$$

于是,

$$q(\vec{x})=(x_1+x_{n+1})(x_1-x_{n+1})+(x_2+x_{n+2})(x_2-x_{n+2})+\cdots+(x_n+x_{2n})(x_n-x_{2n})$$

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_{n+1}\\ y_2=x_1-x_{n+1}\\ y_3=x_2+x_{n+2}\\ y_4=x_2-x_{n+2}\\ \vdots\\ y_{2n-1}=x_n+x_{2n}\\ y_{2n}=x_n-x_{2n}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ q 在 V 的某组基下的规范型是

$$y_1y_2+y_3y_4+\cdots+y_{2n-1}y_{2n}.$$

(iii)$\Rightarrow$(i) 设 $\vec{\delta}_1,\cdots,\vec{\delta}_{2n}$ 是 V 的一组基, 对 $\forall\vec{y}=\sum_{j=1}^{2n}y_j\vec{\delta}_j$

$$q(\vec{y})=y_1y_2+y_3y_4+\cdots+y_{2n-1}y_{2n}.$$

令 $U=\langle\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_3,\cdots,\vec{\delta}_{2n-1}\rangle$, 则 $\dim(U)=n$, 且

$$y\in U\Leftrightarrow y_2=y_4=\cdots=y_{2n}=0$$

$\Rightarrow$ 对 $\forall\vec{y}\in U$, $q(\vec{y})=0$.

2

特征向量和特征多项式

Def 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$, 如果 $\langle\vec{v}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-子空间, 则称 $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征向量,

等价判定

① $\mathcal{A}\vec{v}\in\langle\vec{v}\rangle$

② $\exists\lambda\in F$, s.t $\mathcal{A}\vec{v}=\lambda\vec{v}$

特征子空间, $V^{\lambda}=\{\vec{x}\in V\mid \mathcal{A}(\vec{x})=\lambda\vec{x}\}$

Def 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组基, $\mathcal{A}$ 在该基下矩阵等于 A, 则 $\det(tE-A)$ 称为 $\mathcal{A}$ 的特征多项式

注: 若 $\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的另一组基, $(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$, $P\in GL_n(F)$

$B=P^{-1}AP$

$\det(tE-B)=\det(tE-P^{-1}AP)=\det(P^{-1}(tE-A)P)=\det(tE-A)$

$\mathrm{spec}_F(A)=\{\chi_A(t)$ 在 F 中的所有根$\}$, 称为 A 在 F 中的谱

例 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ 计算 A 的所有复特征根和复特征向量

解: ①计算特征多项式 $\chi_A(t)=\begin{vmatrix}t-1&0&-1\\0&t-1&0\\1&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)(t^2-2t+2)$

$\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}A=\{1,1+\sqrt{-1},1-\sqrt{-1}\}$

$V^1=\{(0,c,0)^t\mid c\in\mathbb{R}\}$, A 的实特征向量是 $(0,c,0)^t$, 其中 $c\neq0$. 它对应的特征值是 1.

V^1 是方程组 $\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 的解空间.

特征子空间 $V^{1+\sqrt{-1}}$ 是方程组

$$\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0&-1\\0&\sqrt{-1}&0\\1&0&\sqrt{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

的解空间, 于是, $V^{1+\sqrt{-1}}=\{c(1,0,\sqrt{-1})^t\mid c\in\mathbb{C}\}$, 类似地, $V^{1-\sqrt{-1}}=\{c(1,0,-\sqrt{-1})^t\mid c\in\mathbb{C}\}$

细节 A 的特征向量

例 计算 A 的实特征根和实特征向量.

$\chi_A(t)=\det(tE-A)=(t-1)(t^2-2t+2)$

$t=1$，实特征向量是 $(0,c,0)^t$，其中 $c\neq 0$

例 设 $A\in\mathcal{L}(V)$，$\alpha,\beta\in spec_F(A)$ 且 $\alpha\neq\beta$，设 $\vec{u}\in V^{\alpha}$，$\vec{v}\in V^{\beta}$ 是两个非零向量。
证明：$\vec{u}+\vec{v}$ 不是 A 的特征向量。

Pf：假设 $\vec{u}+\vec{v}$ 是 A 的特征向量，则 $\exists\lambda\in F$，s.t. $A(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

$$A(\vec{u}+\vec{v})=A\vec{u}+A\vec{v}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v},\ \alpha,\beta\in F.$$

$$\Rightarrow (\lambda-\alpha)\vec{u}+(\lambda-\beta)\vec{v}=0$$

由 $\alpha\neq\beta$，不妨假设 $\lambda-\alpha\neq 0$

$$\Rightarrow \vec{u}=-\frac{\lambda-\beta}{\lambda-\alpha}\vec{v}\in V^{\beta}$$

$$\Rightarrow A\vec{u}=\beta\vec{u}$$

$$\Rightarrow (\alpha-\beta)\vec{u}=0$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta\longrightarrow\leftarrow$$

$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}$ 不是 A 的特征向量。

法二：引理：设 $A\in\mathcal{L}(V)$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_k\in spec_F(A)$ 两两不同，则 $V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_k}$ 是直和

Pf：设 $\vec{u}+\vec{v}\in V^{\lambda}$，这里 $\lambda\in F$

① $\lambda=\alpha$，$\Rightarrow \vec{v}\in V^{\alpha}$，$\Rightarrow \vec{v}\in V^{\alpha}\cap V^{\beta}=\{\vec{0}\}\longrightarrow\leftarrow$

② $\lambda=\beta$，同理可得 $\rightarrow\leftarrow$

③ $\lambda\neq\alpha,\beta$，$V^{\lambda}+V^{\alpha}+V^{\beta}$ 是直和 $\Rightarrow V^{\lambda}\cap(V^{\alpha}+V^{\beta})=\{\vec{0}\}$

$\vec{u}+\vec{v}\in(V^{\alpha}+V^{\beta})\cap V^{\lambda}$ $\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{u}=-\vec{v}\in V^{\alpha}\cap V^{\beta}$ $\rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow \vec{u}=\vec{v}=\vec{0}$

注意：特征向量不是相似不变量。

解：设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

计算得 $\chi_A=t^2-1$. 故 $spec_{\mathbb{R}}(A)=\{1,-1\}$. 于是 $V^1=\langle(1,1)^t\rangle$ 和 $V^{-1}=\langle(1,-1)^t\rangle$.

设 $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，进而 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

但 A 的特征向量 $(1,1)^t$ 不是 B 的特征向量。

可对角化

Def 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是对角矩阵，则称 $\mathcal{A}$ 是可对角化的.
若 $A\in M_n(F)$ 相似于一个对角矩阵，则称 A 是可对角化的.

Thm.（可对角化判别法 I）设 $n=\dim(V)$ 和 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，则 $\mathcal{A}$ 可对角化当且仅当 $\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

推论 如果 χ_A 在 F 中有 n 个不同的根，则 A 是可对角化的

如何化对角：令 $P=(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n)$，则 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

（可对角化判别法 II）设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 且 $\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$. $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow V=V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_k}$

（可对角化判别法 III）设 $A\in M_n(F)$ 且 $\mathrm{spec}_F(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$. 则 A 可对角化当且仅当

$$\dim(V^{\lambda_1})+\cdots+\dim(V^{\lambda_k})=n.$$

Def $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\lambda\in\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$. 特征根 λ 在 $\chi_A(t)$ 中的重数称为 λ 的代数重数，

$\dim(V^{\lambda})=\lambda$ 的几何重数.

（可对角化判别法 IV）设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ 以下两个条件成立.

(i) $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中可以分解为一次因子之积

(ii) $\forall\lambda\in\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$，其几何重数=代数重数

例 $A=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}$,

$$\chi_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t+1&-1&1\\3&t-5&1\\3&-3&t-1\end{vmatrix}=(t-2)^2(t-1)$$

$\Rightarrow t_1=1,\ t_2=2$

由于 1 在 $\chi_A(t)$ 中代数重数为 1，故 $\dim V^1=1$

$t_2E-A\begin{pmatrix}3&-3&1\\3&-3&1\\3&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&-3&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim V^2=3-1=2$

$\Rightarrow \dim V^1+\dim V^2=1+2=3=\dim V.$

$\Rightarrow A$ 可对角化

$\Rightarrow$ 或利用 IV

$\chi_A(t)$ 可分解为一次因子之积，且对 $\forall\lambda\in\mathrm{spec}_F(A)$，其几何重数=代数重数，故 A 可对角化.

$\Rightarrow$ 注：此处 A 可对角化，但 A 没有 3 个不同的特征值.