# 第十二周习题课

## ——期中试卷评讲

1.2.3 略.

4. 注意根据特征进行分类讨论.

5. 方法一: 运用对偶定理.

由对偶定理可得,

$$\dim V = im(\phi) + ker(\phi)$$

(i) 当$\phi$是单射时, $ker(\phi)=\{0\}$, 所以

$$\dim(ker(\phi)) = 0.$$

所以 $\dim V = im(\phi) \leq \dim W$.

(ii) 当$\phi$是满射时, $im(\phi) = W$, 所以

$$\dim V = \dim W + ker(\phi)$$

所以 $\dim V \geq \dim W$.

(iii) 当 $\dim V = \dim W$ 时.

当$\phi$是单射时, $\dim V = im\phi$, 又由 $\dim V = \dim W$

得 $\dim(im(\phi)) = \dim W$, 所以

$$im\phi = W,$$

得$\phi$是满射.

当$\phi$是满射时，$im(\phi)=W$. 由$\dim W=\dim V$和$\dim V=\dim(im\phi)+\dim(\ker\phi)$，得

$$\dim(\ker\phi)=0$$

所以$\ker\phi=\{0\}$，得$\phi$是单射.

方法二. 设$\dim V=n$，$\dim W=m$. 设$A$是$\phi$在某组基下的矩阵

(i) 当$\phi$为单射时，$A$是列满秩的，所以$n\leq m$，即$\dim V\leq\dim W$

(ii) 当$\phi$为满射时，$A$是行满秩的，所以$n\geq m$，即$\dim V\geq\dim W$

(iii) 当$\dim V=\dim W$时，$A$是列满秩当且仅当$A$是行满秩，所以$\phi$是单射当且仅当$\phi$是满射.

方法三. 见上学期期中考试解答.

6. (1) 设 $u_1, \cdots, u_s$ 是 $U$ 的一组基，把 $u_1, \cdots, u_s$ 扩充成 $u_1, \cdots, u_s, u_{s+1}, \cdots, u_n$ 为 $V$ 一组基。由线性映射基本定理Ⅱ，存在线性映射 $A$，使得

$$A(u_1) = u_1, \cdots, A(u_s) = u_s$$

$$A(u_{s+1}) = 0, \cdots, A(u_n) = 0.$$

所以 $\operatorname{im} A = \langle A(u_1), \cdots, A(u_n) \rangle$

$$= \langle u_1, \cdots, u_s \rangle = U.$$

(2) 设 $u_1, \cdots, u_s$ 是 $U$ 的一组基，$w_1, \cdots, w_t$ 是 $W$ 的一组基，因为 $V = U \oplus W$，所以 $u_1, \cdots, u_s, w_1, \cdots, w_t$ 是 $V$ 的一组基。由线性映射基本定理Ⅱ，得存在线性映射 $B$，使得

$$B(u_1) = 0, \cdots, B(u_s) = 0,$$

$$B(w_1) = w_1, \cdots, B(w_t) = w_t.$$

则 $\operatorname{im} B = \langle B(w_1), \cdots, B(w_t) \rangle = W.$

显然，$U \subseteq \ker B$，反之，设 $x \in \ker B$，$x = x_1 u_1 + \cdots + x_s u_s + y_1 w_1 + \cdots + y_t w_t$，则

$$0 = B(x) = y_1 w_1 + \cdots + y_t w_t$$

因为 $w_1, \cdots, w_t$ 线性无关，所以

$$y_1 = \cdots = y_t = 0.$$

则 $x = x_1 u_1 + \cdots + x_s u_s \in U$. 所以

$$\ker B = U$$

7. $\Rightarrow$ 因为 $A$ 是半正定的，所以存在 $P$ 为可逆矩阵，使得 $P^t A P = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$. 令 $Q = P^{-1}$，则 ~~$Q^t A Q = ($~~

$$A = Q^t \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

$$= Q^t \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} Q$$

令 $B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} Q$，则 $A = B^t B$.

$\Leftarrow$ 设 $x \in R^n$，则

$$x^t A x = x^t B^t B x$$

$$= (Bx)^t Bx$$

设 $Bx = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$，则 $x^t A x = (y_1 \cdots y_r) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$

$$= y_1^2 + \cdots + y_r^2 \geq 0$$

则 $A$ 是半正定矩阵。

$\square$

$\Leftarrow$

另解：因为 $A=B^tB$，其中 $B\in\mathbb{R}^{r\times n}$，令

$$P=\begin{pmatrix} B \\ O_{(n-r)\times n}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

则 $P^tP=\begin{pmatrix} B^t & O_{n\times(n-r)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ O_{(n-r)\times n}\end{pmatrix}$

$$=B^tB=A.$$

~~所以~~ 因为 $A$ 可以写成 $P^tP$，$P\in M_n(\mathbb{R})$，

则 $A$ 是半正定矩阵。

$\square$

8. (iii) $\Rightarrow$ (i) 令 $U=\langle \varepsilon_1, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_{2n-1} \rangle$，则

$\dim U = n$，且 $\forall x = x_1\varepsilon_1 + x_3\varepsilon_3 + \cdots x_{2n-1}\varepsilon_{2n-1} \in U$，

有 $q(x) = x_1 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 + \cdots + x_{2n-1} \cdot 0 = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) 方法一：变量代换：

因为 $q$ 的正惯性指数为 $n$，所以存在 $V$ 的一组基，使得

$$
\begin{aligned}
q &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - \cdots - x_{2n}^2 \\
&= x_1^2 - x_{n+1}^2 + x_2^2 - x_{n+2}^2 + \cdots + x_n^2 - x_{2n}^2 \\
&= (x_1 - x_{n+1})(x_1 + x_{n+1}) + \cdots + (x_n - x_{2n})(x_n + x_{2n})
\end{aligned}
$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_{n+1} \\ y_2 = x_1 + x_{n+1} \\ \quad \vdots \\ y_{2n-1} = x_n - x_{2n} \\ y_{2n} = x_n + x_{2n} \end{cases}$，该变换为(可逆)坐标变换，

则 $q = y_1 y_2 + y_3 y_4 + \cdots + y_{2n-1} y_{2n}$.

方法二：只需证明：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{2} & & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \frac{1}{2} \\ & & & & & \frac{1}{2} & \end{pmatrix}$$

对 $A$ 进行行列相伴变换

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

只需证明 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1+c_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2-\frac{1}{2}c_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1\to\frac{-1}{2}c_1]{r_1\to\frac{-1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) 设 $q$ 的正惯性指数为 $m$，则 $q$ 在某组基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_{2n}$ 下的规范型为

$$x_1^2+\cdots+x_m^2-x_{m+1}^2-\cdots-x_{2n}^2$$

反证，若 $m>n$，令 $W=\langle\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m\rangle$，则 $\dim W=m>n$。由维数定理可知，$\dim(W\cap U)\geq 1$，所以存在 $y\neq 0$，$y\in W\cap U$，因为 $y\in W$，所以

$$q(y)>0$$

但又由 $y\in U$，有 $q(y)=0$，矛盾。同理，$m<n$ 也可类似导出矛盾。所以 $m=n$。