1. 用两种方法计算下面的行列式.

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix},\qquad |B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

去掉A所在的行与列剩下的组成的行列式。

解: 法一(化上三角)

$$|A|=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{31}{7} \end{vmatrix} = -7\cdot\frac{31}{7} = -31$$

法二(利用代数余子式)

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 24 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1)(24+7) = -31.$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}\underset{(-1)^{n+i}M_{in}}{\underset{\parallel}{A_{in}}}. \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \end{aligned}}$$

法一:(化上三角).

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot 4 = -8.$$

法二.(利用代数余子式)

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$=(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$= -4-4=-8.$$

2.
$$|D_n|=\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$x-a+(n-1)a=x+(n-2)a.$

$$|A|=\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

解：

$$|A| \xlongequal{c_1+\sum_{i=2}^{n} c_i} \begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+(n-2)a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & \cdots & a \\ 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}.$$

$$=(x+(n-2)a)(x-2a)^{n-1}.$$

3. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2+c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3+c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \begin{matrix} a_{1j}+b_{1j} \\ a_{2j}+b_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj}+b_{nj} \end{matrix} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix} & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{matrix} & \cdots \end{vmatrix}$$

pf:

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2+c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3+c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1+a_1 & b_1 \\ c_2 & b_2+a_2 & b_2 \\ c_3 & b_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. 证明：一个n阶矩阵A总可以通过第二类初等行和列变换化为一个对角阵 $A' = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$

且 $\det(A) = \det(A') = d_1 d_2 \cdots d_n$.

Pf：下面对n进行归纳.

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

① $n=1$，$A = a_{11}$ ✓

② 假设命题对 $n-1$ 成立，来看n的情形.

(i) 若A的第一行，第一列元素均为0，则 $A = \begin{pmatrix} 0 & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & A_1 \end{pmatrix}$

由归纳假设可知，通过第二类初等行变换和列变换，可将 A_1 化为对角阵 $\begin{pmatrix} d_2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$

从而，$\therefore A \to \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$

(ii) 若A的第一行或第一列存在非零元素.

Case 1. 若 $a_{11} \neq 0$，

$$A \xrightarrow[i=2,\cdots,n]{r_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} r_1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \xrightarrow[i=2,\cdots,n]{c_i - \frac{a_{1i}}{a_{11}} c_1} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

由归纳假设，A_1 通过第二类初等行变换和列变换，可将其化为对角矩阵 $\begin{pmatrix} d_2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$

从而，$A \to \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

Case 2 若 $a_{11} = 0$，则 $\exists\, i \in \{2, \cdots, n\}$, s.t. $a_{i1} \neq 0$ 或 $j \in \{2, \cdots, n\}$, s.t. $a_{1j} \neq 0$.

不妨设 $a_{i1} \neq 0$.

$$A \xrightarrow{r_1 + r_i} \begin{pmatrix} a_{i1} & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & & * & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{变换}]{\text{通过Case1的}} \begin{pmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

同样地，利用归纳假设，可将 A_1 化为对角矩阵，从而A可通过第二类初等行(列)变换

化为对角阵.

由于第三类初等行变换和列变换不改变行列式值，我们有

$$\det(A)=\det(A')=d_1d_2\cdots d_n.$$

5. $$\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

$|1-a_1|=1-a_1$

$$\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 \\ -1 & 1-a_2 \end{vmatrix}=(1-a_1)(1-a_2)+a_2=1-a_1+a_1a_2.$$

$\cdots$ $1+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_1\cdots a_i$

解：当 $n\geq 3$ 时，设

$$D_n^{(i)}=\begin{vmatrix} 1-a_i & a_{i+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_{i+1} & a_{i+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & -1 & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

$n-i+1$ 阶.

原行列式去掉前 $i-1$ 行，$i-1$ 列，剩下的子行列式。

$D_n^{(1)}=D_n$,

$D_n^{(i)}\ \underline{\text{按第一列展开}}\ (1-a_i)D_n^{(i+1)}+(-1)^{1+2}a_{i+1}\cdot(-1)\cdot D_n^{(i+2)}$

$$\Rightarrow \boxed{D_n^{(i)}=(1-a_i)D_n^{(i+1)}+a_{i+1}D_n^{(i+2)}}$$

$$\Rightarrow D_n^{(i)}+a_iD_n^{(i+1)}=D_n^{(i+1)}+a_{i+1}D_n^{(i+2)},\quad i=1,2,\cdots,n-2.$$

$$\Rightarrow D_n^{(1)}+a_1D_n^{(2)}=D_n^{(2)}+a_2D_n^{(3)}=\cdots=D_n^{(n-1)}+a_{n-1}D_n^{(n)}$$

$$D_n^{(n-1)}=\begin{vmatrix} 1-a_{n-1} & a_n \\ -1 & 1-a_n \end{vmatrix}=1-a_{n-1}+a_{n-1}a_n$$

$D_n^{(n)}=1-a_n.$

$$\Rightarrow \boxed{D_n^{(n-1)}+a_{n-1}D_n^{(n)}=1.}$$

$$\Rightarrow D_n^{(i-1)}+a_{i-1}D_n^{(i)}=1,\quad i=2,\cdots,n.$$

$D_n = D_n^{(1)} = 1 - a_1 D_n^{(2)} = 1 - a_1(1 - a_2 D_n^{(3)})$

$= 1 - a_1 + (-1)^2 a_1 a_2 D_n^{(3)}$

$= 1 - a_1 + a_1 a_2 (1 - a_3 D_n^{(4)})$

$\cdots\cdots$

$= 1 - a_1 + a_1 a_2 + (-1)^3 a_1 a_2 a_3 + \cdots + (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} D_n^{(n)}$

$= 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_1 \cdots a_i$.

6. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix}$, $a \neq b$.

解：若 $a=0$，$D_n = \begin{vmatrix} b & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & b \end{vmatrix} = b^n$，若 $b=0$，$D_n = a^n$.

$ab \neq 0$，

当 $n \geq 3$ 时.

$D_n \xlongequal{\text{按第1行展开}} (a+b)D_{n-1} + (-1)^{1+2} ab D_{n-2} = \boxed{D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.}$ ①

$\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$

$\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = (D_2 - aD_1) b^{n-2}$.

$D_2 - aD_1 = b^2$. $\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = b^n$ ②

由① $\Rightarrow D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-2} - bD_{n-2})$

$\Rightarrow D_n - bD_{n-1} = a^n$ ③

由②③可得，$D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$，$n \geq 3$

易验证 $n=1, 2$. D_n ✓.

[illegible]的行列式

分块矩阵的行列式

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B) = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix} C & A_m \\ B_n & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{mn}\det(A)\det(B)$$

行列式乘法

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$$

$\forall A \in M_n(\mathbb{R})$

A 可逆 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ 只有零解

A 不可逆 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ 有非平凡解.

例：若 $A-B,\ A+B \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆，则 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 可逆.

解：$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -E_n & E_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix} \qquad *$$

法一：$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\underbrace{\begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}}_{\in M_{2n}(\mathbb{R})} \geq \operatorname{rank}(A-B) + \operatorname{rank}(A+B) = 2n.$

$\Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix} \leq 2n.$

$\Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix} = 2n \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 可逆.

法二：对 (*) 两边取行列式，得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{vmatrix} = |A-B|\cdot|A+B| \neq 0.$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 可逆.

例 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$，且任取 $i \neq j$ 有 $\underline{(n-1)|a_{ij}| < |a_{ii}|}$，证明：$|A| \neq 0$

解：假设 $|A| = 0$，则方程 $A\vec{x} = \vec{0}$ 有非零解. 取其中一个非零解 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

令 $|x_k| = \max\limits_i |x_i|$，$x_k \neq 0$.

$A\vec{x}=0$ 第k个方程为

$$a_{kk}x_k+\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j=0$$

$$\Rightarrow |a_{kk}||x_k|=\left|\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j\right| \le \sum_{j\neq k}|a_{kj}||x_j| \le \sum_{j\neq k}\frac{|a_{kk}|}{n-1}|x_j|$$

$$=|a_{kk}|\sum_{j\neq k}\frac{|x_j|}{n-1} \le |a_{kk}|\sum_{j\neq k}\frac{|x_k|}{n-1}=|a_{kk}||x_k|.$$

$$\Rightarrow |a_{kk}||x_k|<|a_{kk}|\cdot|x_k| \rightarrow\Leftarrow.$$

$$\Rightarrow A\neq 0$$

定义（严格对角占优矩阵）对于方阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 的元素 a_{ij}，如果

$$|a_{jj}|>\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}|,\ j=1,2,\cdots,n.$$

则称矩阵A为严格对角占优矩阵.

证明：严格对角占优矩阵是可逆矩阵.

pf：假设 $|A|=0$，则 $\exists\vec{x}\neq\vec{0}$, s.t. $\vec{x}^tA=\vec{0}$，令 $|x_k|=\max_i|x_i|$. 则 $\neq 0$

$\vec{x}^tA=\vec{0}$ 的第k个方程为

$$\sum_{i=1}^{n}x_ia_{ik}=0$$

$$\Rightarrow |x_ka_{kk}|=|x_k||a_{kk}|\le\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}|x_i||a_{ik}|$$

$$|a_{kk}|\le\sum_{i\neq k}^{n}\frac{|x_i|}{|x_k|}|a_{ik}|\le\sum_{i\neq k}^{n}|a_{ik}| \rightarrow\Leftarrow$$

$$\Rightarrow |A|\neq 0$$

M_{ij}

伴随矩阵

$$A^\vee=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{n,n}\end{pmatrix}$$

prop $AA^\vee=AA^\vee=|A|E$

$\Rightarrow$ 若A可逆，则 $A^{-1}=\dfrac{A^\vee}{|A|}$

例 $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 可逆，

$$A^{-1}=\frac{A^{\vee}}{\det(A)}=\frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}}{ad-bc}.$$

子式和矩阵的秩

Def. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $i_1,\dots,i_k\in\{1,2,\dots,m\}$ 不必两两不同, $j_1,\dots,j_k\in\{1,2,\dots,n\}$ 也不必两两不同. A的第 $i_1,\dots,i_k$ 行和第 $j_1,\dots,j_k$ 列组成的矩阵行列式

$$\det\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots & a_{i_k,j_k}\end{pmatrix}$$

称为A的一个k阶子式, 记为 $M_A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & ① & ② \end{array} \\ A=\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{8} \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} ② \\ ① \\ \ \end{array} \end{array} \qquad M_A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Thm $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 非零. $\operatorname{rank}(A)=r \iff$ A的所有大于r阶的子式都等于0, 且存在一个r阶子式非零

$\iff$ A的所有r+1阶的子式都等于0, 且存在一个r阶子式非零.

$$\boxed{\operatorname{rank}(A^{\vee})=\begin{cases} n, & \operatorname{rank}(A)=n \\ 1, & \operatorname{rank}(A)=n-1 \\ 0, & \operatorname{rank}(A)\le n-2. \end{cases}}$$

Pf: ① $\operatorname{rank}(A)=n$, $|A|\neq 0$,

由 $AA^{\vee}=|A|E$

$\Rightarrow |A^{\vee}|=|A|^{n-1}\neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A^{\vee})=n$.

② $\operatorname{rank}(A)=n-1$,

$\boxed{\text{Claim: } A,B\in M_n(\mathbb{R}),\ AB=0,\ \text{则}\ \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\le n.}$

证: $A(\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{B}^{(n)}) = O \Rightarrow A\vec{B}^{(i)} = \vec{0}$.

可由 Sylvester 不等式直接推出

$\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{B}^{(n)}$ 是 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解

$A\vec{x}=\vec{0}$ 的解空间维数为 $n-\mathrm{rank}(A)$.

$$\mathrm{rank}(B) = \dim(\underbrace{\langle \vec{B}^{(1)},\dots,\vec{B}^{(n)}\rangle}_{\subseteq W}) \le \dim(W) = n-\mathrm{rank}(A)$$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B) \le n$.

$AA^{\vee} = |A|E = O \Rightarrow \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A^{\vee}) \le n$.

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A^{\vee}) \le n-(n-1) = 1$.

又∵ $\mathrm{rank}(A)=n-1 \Rightarrow$ 存在 $n-1$ 阶子式非零.

$\Rightarrow A^{\vee} \ne O$.

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A^{\vee}) = 1$.

③ $\mathrm{rank}(A) \le n-2$, $\Rightarrow A$ 的任何 $n-1$ 阶子式均为 0

$\Rightarrow A^{\vee} = O$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A^{\vee}) = 0$