1. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $\chi_A=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$

$\chi_A=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=4$

$\lambda_1=1$, $(E-A)\vec{x}=\vec{0}$, $\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $(\lambda E-A)x=0$ 的解空间为 $\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$V^{\lambda_1}=\left\{ c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$

$\lambda_2=4$, $4E-A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&3&-3\\0&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $(4E-A)x=0$ 的解空间为 $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$, $V^{\lambda_2}=\left\{c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\middle| c_1\in\mathbb{R}\right\}$

$\Rightarrow$ A的所有实特征根为1和4，实特征向量为 $V^{\lambda_1}\cup V^{\lambda_2}\setminus\{0\}$.

2. (特征向量) Def 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{v}\in V\setminus\{0\}$, 如果 $\langle\vec{v}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-子空间, 则称 $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征向量

prop. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{v}\in V\setminus\{0\}$. 则下列陈述等价:

(i) $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量.

(ii) $\mathcal{A}\vec{v}\in\langle\vec{v}\rangle$

(iii) 存在 $\lambda\in F$, s.t. $\mathcal{A}\vec{v}=\underset{\text{特征值}}{\lambda}\vec{v}$.

2. pf: (a) $\vec{v}$ 是A的特征向量 $\Leftrightarrow$ $\exists\lambda\in F$, s.t. $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $A^{-1}A\vec{v}=A^{-1}(\lambda\vec{v})=\lambda A^{-1}\vec{v}$

由A可逆, 注意到 $\chi_A(0)\neq0$, 则 $\lambda\neq0$.

故 $\vec{v}$ 是A的特征向量 $\Leftrightarrow$ $A^{-1}\vec{v}=\frac{1}{\lambda}\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{v}$ 是 A^{-1} 的特征向量

(b) 由(a)可知, $\lambda\in F$ 是A的特征根当且仅当 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征根.

3. pf: 由 $A\sim_S B$ 知, $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$, s.t. $B=P^{-1}AP$.

$|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|\lambda E-A|$

$\Rightarrow \mathrm{spec}_F(A)=\mathrm{spec}_F(B)$

定义 ϕ: $V_A^\lambda \longmapsto V_B^\lambda$

$\vec{x} \mapsto P^{-1}\vec{x}$

由 $B=P^{-1}AP \Rightarrow BP^{-1}=P^{-1}A$.

对 $\forall \vec{x}\in V_A^\lambda$, $B(P^{-1}\vec{x})=BP^{-1}\vec{x}=(P^{-1}A)\vec{x}=P^{-1}(A\vec{x})=P^{-1}(\lambda\vec{x})=\lambda P^{-1}\vec{x}$

$\Rightarrow P^{-1}\vec{x}\in V_B^\lambda$ 故 ϕ 是良定义的，易验证 ϕ 是线性映射.

类似地，

定义：$\psi: V_B^\lambda \longrightarrow V_A^\lambda$

$\vec{x} \mapsto P\vec{x}$

$\forall \vec{x},\vec{y}\in V_A^\lambda$, $\alpha,\beta\in F$,

$\phi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=P^{-1}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=P^{-1}\alpha\vec{x}+P^{-1}\beta\vec{y}$

$=\alpha P^{-1}\vec{x}+\beta P^{-1}\vec{y}$

$=\alpha\phi(\vec{x})+\beta\phi(\vec{y})$.

同理可证 ψ 是线性映射且良定义.

对 $\forall \vec{x}\in V_A^\lambda$, $\psi\circ\phi(\vec{x})=\psi(P^{-1}\vec{x})=PP^{-1}\vec{x}=\vec{x} \Rightarrow \psi\circ\phi=Id$ 同理 $\phi\circ\psi=Id$. $\Rightarrow \phi$ 是线性同构

$\Rightarrow \dim(V_B^\lambda)=\dim(V_A^\lambda)$

4. 可对角化判定方法：设 $A\in\mathcal{L}(V)$, $n=\dim(V)$.

① A 有 n 个线性无关的特征向量

化对角的方法：A 可对角化，找到 n 个线性无关的特征向量 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n}$.

令 $P=(\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n})$, $P^{-1}AP$ 是对角矩阵

推论 χ_A 在 F 中有 n 个不同的根，则 A 可对角化

② $A\in\mathcal{L}(V)$ 且 $spec_F(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$.

A 可对角化 $\Leftrightarrow V=V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_k}$.

③ $A\in\mathcal{L}(V)$ 且 $spec_F(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$. 则 A 可对角化 $\Leftrightarrow \dim(V^{\lambda_1})+\cdots+\dim(V^{\lambda_k})=\dim(V)$.

④ A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 以下两条件成立

① $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中分解为一次因子之积，即 $\chi_A(t)$ 的所有根都在 F 中.

② $\forall\lambda\in spec_F(A)$, $\underbrace{\lambda\text{ 的几何重数}}_{\dim(V^\lambda)}=\underbrace{\text{代数重数}}_{\lambda\text{ 在 }\chi_A(t)\text{ 中的重数}}$

注：λ 的代数重数 $\geq$ 几何重数

⑤ $A\in\mathcal{L}(V)$. 则 A 可对角化 $\Leftrightarrow \underbrace{\mu_A(t)}_{A\text{ 的极小多项式}}$ 在 $F[t]$ 中可以分解为两两互素一次因子之积

$\chi_A(t)=(t-5)(t+1)^2$. $t_1=5$, $t_2=-1$

注意到 5 的代数重数为 1，故 $\dim(V^5)=1$.

$$-E-A=\begin{pmatrix}-3&-3&-1\\-3&-3&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3&-3&-1\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow \dim(V^{-1})=1\neq 2$$

由对角化判别法可知，A不能对角化

5. 证：

$$A=\begin{pmatrix}a&*&\cdots&*\\&a&&*\\&&\ddots&\vdots\\&&&a\end{pmatrix}\in M_n(F)$$

$$\chi_A(t)=|tE-A|=(t-a)^n$$

$\Rightarrow \chi_A(t)$ 在 $F[x]$ 中可以分解为一次因子之积且 a 是 A 的唯一特征根

假设 A 可对角化，则 a 的几何重数等于 n.

从而

$$aE-A=\begin{pmatrix}0&*&\cdots&*\\&\ddots&\cdots&*\\&&&0\end{pmatrix}$$ 对应齐次线性方程组的解空间维数等于 n.

$\Rightarrow \operatorname{rank}(aE-A)=0$

$\Rightarrow *$ 全部为 0　　$\to\leftarrow$

6. 证：设

$$A=\begin{pmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&\cdots&a_{n-3}&a_{n-2}\\a_{n-2}&a_{n-1}&\cdots&a_{n-4}&a_{n-3}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&a_0\end{pmatrix}$$

设 $\epsilon_0,\cdots,\epsilon_{n-1}$ 是 n 个 n 次单位根，令

$$f=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-1}\in\mathbb{C}[x]$$

对 $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，利用 $\epsilon_k^n=1$，得到

$$f(\epsilon_k)=a_0+a_1\epsilon_k+\cdots+a_{n-2}\epsilon_k^{n-2}+a_{n-1}\epsilon_k^{n-1}$$
$$\epsilon_k f(\epsilon_k)=a_{n-1}+a_0\epsilon_k+\cdots+a_{n-3}\epsilon_k^{n-2}+a_{n-2}\epsilon_k^{n-1}$$
$$\epsilon_k^2 f(\epsilon_k)=a_{n-2}+a_{n-1}\epsilon_k+\cdots+a_{n-4}\epsilon_k^{n-2}+a_{n-3}\epsilon_k^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$\epsilon_k^{n-1}f(\epsilon_k)=a_1+a_2\epsilon_k+\cdots+a_{n-1}\epsilon_k^{n-2}+a_0\epsilon_k^{n-1}$$

$$\Rightarrow f(\epsilon_k)\begin{pmatrix}1\\ \epsilon_k\\ \epsilon_k^2\\ \vdots\\ \epsilon_k^{n-1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ \epsilon_k\\ \epsilon_k^2\\ \vdots\\ \epsilon_k^{n-1}\end{pmatrix},\ k=0,1,\cdots,n-1$$

设

$$V=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \epsilon_0 & \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \epsilon_0^{n-1} & \epsilon_1^{n-1} & \cdots & \epsilon_{n-1}^{n-1}\end{pmatrix} \Rightarrow V\begin{pmatrix}f(\epsilon_0) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\epsilon_{n-1})\end{pmatrix}=AV.$$

$$\Rightarrow A=V\begin{pmatrix}f(\epsilon_0) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\epsilon_{n-1})\end{pmatrix}V^{-1} \Rightarrow A\text{可对角化}$$

例. 设 $n>1$ 且

$$\phi: M_n(F)\longrightarrow M_n(F)$$
$$A\mapsto A^t$$

(i) 验证 ϕ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的线性算子.

(ii) 求 $\mathrm{rank}(\phi)$

(iii) 计算 ϕ 的特征根和特征子空间.

(iv) 确定 ϕ 是不是可对角化.

解：(i) 对任意 $\alpha,\beta\in F$, $A,B\in M_n(\mathbb{R})$, $(\alpha A+\beta B)^t=\alpha A^t+\beta B^t$

$\Rightarrow\phi$ 线性.

(ii) $\phi^2=\varepsilon \Rightarrow \phi$ 可逆 $\Rightarrow \mathrm{rank}(\phi)=\dim_F(M_n(F))=n^2$

(iii). 当 $\mathrm{Char}(F)\neq 2$，由 $n>1$，故 ϕ 不是数乘算子，于是，$\mu_A=t^2-1$，故 $\mathrm{spec}_F(\phi)=\{1,-1\}$

注意到 $A\in SM_n(F)\Leftrightarrow\phi(A)=A$.

$\Rightarrow 1$ 是特征根且 $V^1=SM_n(F)$.

类似地，$A\in SSM_n(F)$ 当且仅当 $\phi(A)=-A$

$\Rightarrow -1$ 是特征根 且 $V^{-1}=SSM_n(F)$

$\mathrm{Char}(F)=2$， $n>1$，ϕ 不是数乘算子，$\mu_A=(t-1)^2$. $\Rightarrow \mathrm{spec}(\phi)=\{1\}$.

$A\in SM_n(F)\Leftrightarrow\phi(A)=A$

$\Rightarrow 1$ 是特征根. 且 $V^1=SM_n(F)$

(iv) $\mathrm{Char}(F)=2$，可对角化.

$\mathrm{Char}(F)\neq 2$，不可对角化.

关于不变量

Def 设 $A,B\in F^{m\times n}$. 如果存在 $P\in GL_m(F)$ 和 $Q\in GL_n(F)$，使得 $B=PAQ$. 则称 A 与 B 初等等价. 记为 $A\sim_e B$

→ 秩是(一组)关于初等等价的完全不变量.

矩阵的秩是初等不变量. 事实上，$A\sim_e B \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

Def. 设 $A,B\in M_n(F)$. 如果 $\exists P\in GL_n(F)$, s.t. $B=P^tAP$, 则称 A 与 B 合同 记为 $A\sim_c B$.

设 $A,B\in SM_n(\mathbb{C})$; 则 $A\sim_c B\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$ 即对于复对称矩阵而言，秩是(一组)关于合同等价的完全不变量.

→ 矩阵的秩是合同不变量，对称和斜对称也是合同不变量.

设 $A,B\in SM_n(\mathbb{R})$, 则 $A\sim_c B\Leftrightarrow$ 它们的签名相同 即对于实对称矩阵而言，签名是(一组)关于合同等价的完全不变量.

设 $A,B\in SSM_n(F)$, 其中 F 的特征不等于2. 则 $A\sim_c B\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$

Def 设 $A,B\in M_n(F)$, 如果存在 $P\in GL_n(F)$, 使得 $B=P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 相似, 记为 $A\sim_s B$

矩阵的秩，迹，行列式. 极小多项式，特征多项式，特征根是相似不变量

Def 设 $f: M_n(F)\longrightarrow S$ 为映射，其中 S 是一个集合，如果对任意 $A,B\in M_n(F)$, $f(BA)=f(AB)$, 则称 f 是关于方阵的交换不变量.

矩阵的迹，行列式是交换不变量.

prop. 矩阵的特征多项式是交换不变量

pf: 当 $A,B\in M_n(F)$, 我们证明 $\chi_{AB}(t)=\chi_{BA}(t)$

当 A 可逆. $AB\sim_s BA$, 故 $\chi_{AB}(t)=\chi_{BA}(t)$

下用摄动法证明一般情形. 令 z 是 F 上一个新的未定元，$p(z)=\det(zE+A)$. 则 $p\in F[z]$ 是 n 次首一多项式. 特别地 $p\neq 0$.

设 $K=F(z)$. 则 A,B, $zE+A\in M_n(F)$ 且 $zE+A$ 在 $M_n(K)$ 中可逆，

$$\Rightarrow \quad |tE-(zE+A)B| = |tE-B(zE+A)|$$

上式是两个 $F[z,t]$ 中的二元多项式恒等. 从而，$z=0$ 时自然也相等.

$$\Rightarrow \quad |tE-AB|=|tE-BA|$$

$$\Rightarrow \quad \chi_{AB}(t)=\chi_{BA}(t)$$

例 极小多项式不是交换不变量. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} 和 B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \qquad AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \quad BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

直接计算, $\mathrm{rank}(AB)=1$, $\mathrm{rank}(BA)=0$. 于是 $\mu_{BA}=t$, 但 $\mu_{AB}\neq t$. , $\mu_{AB}=t^2$.

循环子空间

Def 设 $A\in\mathcal{L}(V)$ 和 $\vec{v}\in V$. 由 $\vec{v}, A\vec{v}, A^2(\vec{v}), \cdots$

生成的子空间称为由 A 和 $\vec{v}$ 生成的循环子空间. 记为 $F[A]\cdot\vec{v}$.

Prop. 设 $A\in\mathcal{L}(V)$ 和 $\vec{v}\in V$

(i) $F[A]\cdot\vec{v}=\{p(A)(\vec{v})\mid p(t)\in F[t]\}$

(ii) $F[A]\vec{v}$ 是 A 不变的.

(iii) 设 $d=\deg(\mu_{A,\vec{v}})$. 则 $\vec{v}, A\vec{v}, \cdots, A^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[A]\cdot\vec{v}$ 的一组基, 特别地, $d=\dim(F[A]\vec{v})$

设 $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 在标准基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

计算 $\mathbb{R}[A]\cdot\vec{v}$ 的一组基.

解: $A^0(\vec{v})=\vec{v}$. , $A\vec{v}=A\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $A^0\vec{v}$ 与 $A\vec{v}$ 是线性无关, 再计算

$$A^2\vec{v}=A\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

直接验证可得 $\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}$ 是线性无关的, 这三个向量构成 $\mathbb{R}[A]\vec{v}$ 的一组基.