

第十三周习题讲解

郑晓鹏

中国科学院数学与系统科学研究院

目录

- 1 分块矩阵的行列式
- 2 伴随矩阵
- 3 行列式的应用

定理 1

设 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ \underline{O} & B \end{pmatrix} = \underline{\det(A) \det(B)}$$

定理 1

设 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$$

推论 2

设 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则

$$\det \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} &= \det \left(\begin{pmatrix} A_{nm} & O_{nn} \\ C & B \end{pmatrix}^t \right) = \det \left(\begin{pmatrix} A_{nm}^t & C^t \\ 0^t & B^t \end{pmatrix} \right) \\ &= \det(A^t) \cdot \det(B^t) = \det(A) \det(B). \end{aligned}$$

定理 1

设 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$$

推论 2

设 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则

$$\det \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$$

推论 3

设 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} = \underbrace{(-1)^{mn} \det(A) \det(B)}$$

习题 1. 设 $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$, 令

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

证明: 如果 A 可逆 且 $CA = AC$, 则 $|X| = |AD - CB|$.

证明: 因为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ C - CA^{-1}A & D + (-CA^{-1})B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D + (-CA^{-1})B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

两边取行列式, 得

$$\begin{aligned} 1 \cdot |X| &= |A| \cdot |D - CA^{-1}B| \\ &= |AD - ACA^{-1}B| \\ &\stackrel{AC=CA}{=} |AD - CAA^{-1}B| \\ &= |AD - CB| \end{aligned}$$

□

习题 1. 设 $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$, 令

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

证明: 如果 A 可逆且 $CA = AC$, 则 $|X| = |AD - CB|$.

证明: 因为 A 可逆, 所以

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

习题 1. 设 $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$, 令

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

A 不可逆时,
结论也成立.
(摄动法)

证明: 如果 A 可逆且 $CA = AC$, 则 $|X| = |AD - CB|$.

证明: 因为 A 可逆, 所以

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

于是有

$$\begin{vmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

即

$$|X| = |A||D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CAA^{-1}B| = |AD - CB|.$$

练习. 给定实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵 A, B , 设

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},$$

证明: $|X| = |A+B| \cdot |A-B|$.

证明: 思路: " $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ B+A & A+B \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$ "

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B+A & A+B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B+A & A+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -E_n & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

$$\text{于是 } \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -E_n & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

两边取行列式, 得 $|X| = |A-B| \cdot |A+B|$. $\square$

练习. 给定实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵 A, B , 设

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},$$

证明: $|X| = |A + B| \cdot |A - B|$.

证明: 因为

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ -E_n & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B & B \\ O & A + B \end{pmatrix}$$

两边取行列式, 得

$$|X| = |A - B| |A + B|.$$

目录

- 1 分块矩阵的行列式
- 2 伴随矩阵
- 3 行列式的应用

定义 4

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 去掉 A 中第 i 行和第 j 列得到的 $(n-1)$ 阶方阵的行列式称为 A 关于 i 行和 j 列的 $(n-1)$ 阶余子式 (co-minor), 记为 $M_{i,j}$. 而 $A_{i,j} := (-1)^{i+j} M_{i,j}$ 称为 A 关于 i 行和 j 列的代数余子式.

定义 5

设 $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 矩阵

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$$
$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵. 记为 $A^\vee$.

引理 6

$$A^{\vee}A = AA^{\vee} = |A|E_n.$$

$$A^{\vee}A = |A|E_n = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & |A| & \\ & & \ddots \\ & & & |A| \end{pmatrix}_{n \times n}$$

引理 6

$$A^{\vee}A = AA^{\vee} = |A|E_n.$$

定理 7

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆. 则

$$|A| \neq 0. \quad \left(\frac{A^{\vee}}{|A|} \right) A = E_n$$

A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{\vee}$$

$$B \cdot A = E_n \\ \Rightarrow B = A^{-1}$$

习题 2. 求下列矩阵的伴随矩阵及其逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^{\vee} &= \begin{pmatrix} A_{11} & \underline{A_{21}} \\ \underline{A_{12}} & A_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} M_{1,1} & (-1)^{2+1} M_{2,1} \\ (-1)^{1+2} M_{1,2} & (-1)^{2+2} M_{2,2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \chi \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \chi \end{aligned}$$

习题 2. 求下列矩阵的伴随矩阵及其逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

解:

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{\vee} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{|A| = -2}, \quad |B| = 1.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{B^{\vee}}{|B|} = B$$

$$A^{-1} = \frac{A^{\vee}}{|A|} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

习题 4: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 证明伴随矩阵具有如下性质:

$$\underline{(\lambda A)^V = \lambda^{n-1} A^V}; \quad (A^t)^V = (A^V)^t; \quad \underline{|A^V| = |A|^{n-1}}.$$

$$AA^V = |A|E_n = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix}$$

两边取行列式, 得

$$|A| |A^V| = |A|^n$$

$$\xRightarrow{|A| \neq 0} |A|^V = |A|^{n-1}$$

$$|A| = 0. ?$$

$$B = \lambda A$$

$$BB^V = |B|E_n$$

习题 4: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 证明伴随矩阵具有如下性质:

$$(\lambda A)^V = \lambda^{n-1} A^V; \quad (A^t)^V = (A^V)^t; \quad |A^V| = |A|^{n-1}.$$

常见错误: 因为

$$|A|E_n = AA^V$$

$$(\lambda A)(\lambda A)^V \stackrel{V}{=} |\lambda A|E_n = \lambda^n |A|E_n = \lambda^n AA^V,$$

所以

$$\lambda A(\lambda A)^V = \lambda^n AA^V \quad \lambda \neq 0$$

$$A(\lambda A)^V = A(\lambda^{n-1} A^V),$$

则 $(\lambda A)^V = (\lambda^{n-1} A^V)$.

$$A \cdot (\lambda A)^V = \lambda^{n-1} AA^V \quad \checkmark$$

$$\Downarrow |A| \neq 0$$

$$A^{-1} A(\lambda A)^V = \underline{A^{-1}(\lambda^{n-1})AA^V}$$

$$(\lambda A)^V = \lambda^{n-1} A^V$$

习题 4: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 证明伴随矩阵具有如下性质:

$$(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee; \quad (A^t)^\vee = (A^\vee)^t; \quad |A^\vee| = |A|^{n-1}.$$

习题 4: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 证明伴随矩阵具有如下性质:

$$(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee; \quad (A^t)^\vee = (A^\vee)^t; \quad |A^\vee| = |A|^{n-1}.$$

证明: (a) 设 $A' = \lambda A$, 因为 $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, 所以代数余子式 $A'_{ij} = \lambda^{n-1} A_{ij}$,
 则 $(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee$.

$$\begin{aligned} (\lambda A)^\vee &= \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A'_{1n} & A'_{2n} & \cdots & A'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} A_{11} & \lambda^{n-1} A_{21} & \cdots & \lambda^{n-1} A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{n-1} A_{1n} & \lambda^{n-1} A_{2n} & \cdots & \lambda^{n-1} A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^{n-1} A^\vee \end{aligned}$$

习题 4: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 证明伴随矩阵具有如下性质:

$$(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee; \quad (A^t)^\vee = (A^\vee)^t; \quad |A^\vee| = |A|^{n-1}.$$

证明: (a) 设 $A' = \lambda A$, 因为 $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, 所以代数余子式 $A'_{ij} = \lambda^{n-1} A_{ij}$, 则 $(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee$.

$$|A^t| = |A|$$

(b) 记 $A' = A^t$, 则 A' 的代数余子式 $A'_{ij} = A_{ji}$. 则 $(A')^\vee = (A^\vee)^t$. 即

$$(A^t)^\vee = (A^\vee)^t.$$

$$A' = A^t$$

定义
验证

习题 4: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 证明伴随矩阵具有如下性质:

$$(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee; \quad (A^t)^\vee = (A^\vee)^t; \quad |A^\vee| = |A|^{n-1}.$$

证明: (a) 设 $A' = \lambda A$, 因为 $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, 所以代数余子式 $A'_{ij} = \lambda^{n-1} A_{ij}$, 则 $(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee$.

(b) 记 $A' = A^t$, 则 A' 的代数余子式 $A'_{ij} = A_{ji}$. 则 $B^\vee = (A^\vee)^t$. 即 $(A^t)^\vee = (A^\vee)^t$.

(c) 因为 $A^\vee A = |A| E_n$, 两边取行列式, 得 $|A^\vee| |A| = |A|^n$, 所以当 $|A| \neq 0$ 时, 有 $|A^\vee| = |A|^{n-1}$.

习题 4: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 证明伴随矩阵具有如下性质:

$$(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee; \quad (A^t)^\vee = (A^\vee)^t; \quad |A^\vee| = |A|^{n-1}.$$

证明: (a) 设 $A' = \lambda A$, 因为 $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, 所以代数余子式 $A'_{ij} = \lambda^{n-1} A_{ij}$, 则 $(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee$.

(b) 记 $A' = A^t$, 则 A' 的代数余子式 $A'_{ij} = A_{ji}$. 则 $B^\vee = (A^\vee)^t$. 即 $(A^t)^\vee = (A^\vee)^t$.

(c) 因为 $A^\vee A = |A| E_n$, 两边取行列式, 得 $|A^\vee| |A| = |A|^n$, 所以当 $|A| \neq 0$ 时, 有 $|A^\vee| = |A|^{n-1}$.

当 $|A| = 0$ 时, $A^\vee A = O$, 下证 $|A^\vee| = 0$. 反证, 若 $|A^\vee| \neq 0$ 则 $A^\vee$ 可逆, 于是 $(A^\vee)^{-1} A^\vee A = (A^\vee)^{-1} O$, 得 $A = O$. 这蕴含着 $A^\vee = O$, 与假设 $|A^\vee| \neq 0$ 矛盾.

$\Downarrow$
 $A = O$

$$AA^V = I_n$$
$$BB^V = I_n$$

习题 5. (a) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 A, B 可逆, 证明: $(AB)^V = B^V A^V$.

$$\underline{AA^v = |A|E_n} \Rightarrow A^v = |A|A^{-1}$$

$$(AB)(AB)^v = |AB| \cdot E_n$$

习题 5. (a) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 A, B 可逆, 证明: $(AB)^v = \underline{B^v A^v}$.
 证明: 当 A, B 可逆时, $A^v = |A|A^{-1}$, $B^v = |B|B^{-1}$, 所以

$$B^v A^v = \underline{|B|B^{-1}} \underline{|A|A^{-1}} = \underline{|AB|(AB)^{-1}} = \underline{(AB)^v}.$$

$(A, B$ 可逆蕴含着 AB 可逆 而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.)

$$\begin{aligned} |B||A| &= |A||B| \\ &= |AB| \end{aligned}$$

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

$$A, B \text{ 可逆} \Rightarrow (AB)^{\vee} = B^{\vee} A^{\vee}$$

(选做) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 证明: $(AB)^{\vee} = B^{\vee} A^{\vee}$.

证明: 构造 $A_t = A + tE_n$, $B_t = A + tE_n$. 则根据摄动法原理, 存在 $\epsilon > 0$, 当 $t = t_0$, $0 < |t_0| < \epsilon$ 时, A_{t_0}, B_{t_0} 可逆. 所以根据 (a) 有, 当 $t = t_0$, $0 < |t_0| < \epsilon$ 时,

$$\underline{(A_{t_0} B_{t_0})^{\vee} = B_{t_0}^{\vee} A_{t_0}^{\vee}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{两个矩阵相等} \\ \text{对应分量相等} \end{array}$$

$$\underline{\underline{(A_t B_t)^{\vee} = B_t^{\vee} A_t^{\vee}}}_{t=t_0}$$

$$(AB)^{\vee} = B^{\vee}A^{\vee}.$$

A_t, B_t $(A_t B_t)^{\vee} \neq B_t^{\vee} A_t^{\vee}$ 通过 $0 < |t_0| < \epsilon$

$$A_{t_0} B_{t_0} = B_{t_0} A_{t_0}$$

$$t=0$$

$$A_0 = A \quad B_0 = B$$

$$(A_0 B_0)^{\vee} = B_0^{\vee} A_0^{\vee} \Rightarrow (AB)^{\vee} = B^{\vee} A^{\vee}.$$

(选做) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 证明: $(AB)^{\vee} = B^{\vee} A^{\vee}$.

证明: 构造 $A_t = A + tE_n$, $B_t = A + tE_n$. 则根据摄动法原理, 存在 $\epsilon > 0$, 当 $t = t_0, 0 < |t_0| < \epsilon$ 时, A_{t_0}, B_{t_0} 可逆. 所以根据 (a) 有, 当 $t = t_0, 0 < |t_0| < \epsilon$ 时,

$$(A_{t_0} B_{t_0})^{\vee} = B_{t_0}^{\vee} A_{t_0}^{\vee}.$$

因为 $(A_t B_t)^{\vee}$ 的每个分量都是关于 t 的 (次数不超过 $2(n-1)$ 次) 的多项式, $B_t^{\vee} A_t^{\vee}$ 的每个分量也是关于 t 的 (次数不超过 $2(n-1)$ 次) 的多项式, 分别设矩阵各分量为 $f_{ij}(t)$ 和 $g_{ij}(t)$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$, 则当 $0 < |t_0| < \epsilon$, 有 $f_{ij}(t_0) = g_{ij}(t_0)$, 所以 $f_{ij}(t) - g_{ij}(t)$ 有无穷多个不同的根, 所以 $f_{ij}(t) - g_{ij}(t) = 0$. 取 $t = 0$, 则得到 $(AB)^{\vee} = B^{\vee} A^{\vee}$.

$$(A_t B_t)^{\vee} = \begin{pmatrix} \underline{f_{11}(t)} & \cdots & f_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} B_t^{\vee} A_t^{\vee} = \begin{pmatrix} \underline{g_{11}(t)} & \cdots & g_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(t) & \cdots & g_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

$$\exists \epsilon > 0 < |t_0| < \epsilon. \quad f_{ij}(t_0) = g_{ij}(t_0).$$

$$\underline{F(t) = f_{ij}(t) - g_{ij}(t)}, \quad \underline{F(t_0) = 0}, \quad 0 < |t_0| < \epsilon \Rightarrow \underline{F(t) = 0} \Rightarrow \underline{f_{ij}(t) = g_{ij}(t)}$$

$$A_0 = (f_{ij}(0))$$

(选做) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 证明: $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$.

证明: 构造 $A_t = A + tE_n$, $B_t = A + tE_n$. 则根据摄动法原理, 存在 $\epsilon > 0$, 当 $t = t_0, 0 < |t_0| < \epsilon$ 时, A_{t_0}, B_{t_0} 可逆. 所以根据 (a) 有, 当 $t = t_0, 0 < |t_0| < \epsilon$ 时,

$$(A_{t_0} B_{t_0})^\vee = B_{t_0}^\vee A_{t_0}^\vee.$$

$$f_{ij}(0) = g_{ij}(0).$$

因为 $(A_t B_t)^\vee$ 的每个分量都是关于 t 的 (次数不超过 $2(n-1)$ 次) 的多项式, $B_t^\vee A_t^\vee$ 的每个分量也是关于 t 的 (次数不超过 $2(n-1)$ 次) 的多项式, 分别设矩阵各分量为 $f_{ij}(t)$ 和 $g_{ij}(t)$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$, 则当 $0 < |t_0| < \epsilon$, 有 $f_{ij}(t_0) = g_{ij}(t_0)$, 所以 $f_{ij}(t) - g_{ij}(t)$ 有无穷多个不同的根, 所以 $f_{ij}(t) - g_{ij}(t) = 0$. 取 $t = 0$, 则得到 $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$.

(最后一句话也可以这么表达, 当 $0 < |t_0| < \epsilon$, 有 $f_{ij}(t_0) = g_{ij}(t_0)$, 又因为 $f_{ij}(t) = g_{ij}(t)$ 是连续函数, 所以 $\lim_{t \rightarrow 0} f_{ij}(t) = f_{ij}(0)$, $\lim_{t \rightarrow 0} g_{ij}(t) = g_{ij}(0)$, 又因为 $f_{ij}(t_0) = g_{ij}(t_0)$,

$0 < |t_0| < \epsilon$, 所以两边令 $t_0 \rightarrow 0$, 得 $f_{ij}(0) = g_{ij}(0)$.

$$t_0 \rightarrow 0$$

$$f_{ij}(0) = g_{ij}(0).$$

$$t_0 \rightarrow 0$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} f_{ij}(t_0) = f_{ij}(0)$$

例子: 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 设 $A_t = \begin{pmatrix} 1+t & 2 \\ 2 & 4+t \end{pmatrix}$, $B_t = \begin{pmatrix} 1+t & 2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}$.
则

$$A_t B_t = \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 1 & 4 + 4t \\ 2t + 2 & t^2 + 5t + 8 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{(A_t B_t)^v \neq B_t^v A_t^v}$$

例子: 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 设 $A_t = \begin{pmatrix} 1+t & 2 \\ 2 & 4+t \end{pmatrix}$, $B_t = \begin{pmatrix} 1+t & 2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}$.
 则

$$A_t B_t = \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 1 & 4 + 4t \\ 2t + 2 & t^2 + 5t + 8 \end{pmatrix} = A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$(A_t B_t)^V = \begin{pmatrix} t^2 + 5t + 8 & -(4 + 4t) \\ -(2t + 2) & t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}.$$

例子: 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 设 $A_t = \begin{pmatrix} 1+t & 2 \\ 2 & 4+t \end{pmatrix}$, $B_t = \begin{pmatrix} 1+t & 2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}$.
则

$$A_t B_t = \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 1 & 4 + 4t \\ 2t + 2 & t^2 + 5t + 8 \end{pmatrix}.$$

$$(A_t B_t)^\vee = \begin{pmatrix} t^2 + 5t + 8 & -(4 + 4t) \\ -(2t + 2) & t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_t^\vee = \begin{pmatrix} 1+t & -2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}, A_t^\vee = \begin{pmatrix} 4+t & -2 \\ -2 & 1+t \end{pmatrix}.$$

$$B_t^\vee A_t^\vee =$$

例子: 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 设 $A_t = \begin{pmatrix} 1+t & 2 \\ 2 & 4+t \end{pmatrix}$, $B_t = \begin{pmatrix} 1+t & 2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}$.
则

$$A_t B_t = \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 1 & 4 + 4t \\ 2t + 2 & t^2 + 5t + 8 \end{pmatrix}.$$

$$|A_t| = f(t)$$

$$(A_t B_t)^{\vee}$$

$$(f_{ij}^{\vee}(t)).$$

$$(A_t B_t)^{\vee} = \begin{pmatrix} t^2 + 5t + 8 & -(4 + 4t) \\ -(2t + 2) & t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_t^{\vee} = \begin{pmatrix} 1+t & -2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}, A_t^{\vee} = \begin{pmatrix} 4+t & -2 \\ -2 & 1+t \end{pmatrix}.$$

$$B_t^{\vee} A_t^{\vee} = \begin{pmatrix} t^2 + 5t + 8 & -4 - 4t \\ -2 - 2t & t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}$$

$$t = t_0 \quad 0 < |t - t_0| < \varepsilon \quad (A_{t_0} B_{t_0})^{\vee} = B_{t_0}^{\vee} A_{t_0}^{\vee}$$

$$\Rightarrow (A_t B_t)^{\vee} = B_t^{\vee} A_t^{\vee}$$

例子: 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 设 $A_t = \begin{pmatrix} 1+t & 2 \\ 2 & 4+t \end{pmatrix}$, $B_t = \begin{pmatrix} 1+t & 2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}$.
则

$$A_t B_t = \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 1 & 4 + 4t \\ 2t + 2 & t^2 + 5t + 8 \end{pmatrix}.$$

$$(A_t B_t)^\vee = \begin{pmatrix} t^2 + 5t + 8 & -(4 + 4t) \\ -(2t + 2) & t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_t^\vee = \begin{pmatrix} 1+t & -2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}, A_t^\vee = \begin{pmatrix} 4+t & -2 \\ -2 & 1+t \end{pmatrix}.$$

$$B_t^\vee A_t^\vee = \begin{pmatrix} t^2 + 5t + 8 & -4 - 4t \\ -2 - 2t & t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}$$

验证发现 $(A_t B_t)^\vee = B_t^\vee A_t^\vee$. 但是我们是通过证明存在无数多个 $t_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $(A_{t_0} B_{t_0})^\vee = B_{t_0}^\vee A_{t_0}^\vee$, 从而证明 $(A_t B_t)^\vee = B_t^\vee A_t^\vee$. 然后特别地取 $t = 0$, 得 $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$.

习题 3. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 满足 $AA^t = E_n$, $|A| = -1$. 证明: $|E_n + A| = 0$.

$$\underline{|E_n + A| = -|E_n + A|} \Rightarrow |E_n + A| = 0$$

$$\underline{A^{-1} = A^t.}$$

习题 3. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 满足 $\underline{AA^t = E_n}$, $|A| = -1$. 证明: $|E_n + A| = 0$.

证明: 因为 $\underline{(E_n + A)A^t} = \underline{(A^t + AA^t)} = \underline{A^t + E_n}$, 所以

$$|A^t| = |A| = -1$$

$$\underline{|E_n + A||A^t| = |A^t + E_n|}$$

则 $\underline{-|E_n + A| = |A^t + E_n|}$. 又因为 $(A^t + E_n)^t = (A^t)^t + E_n^t = A + E_n$

$$\underline{|A^t + E_n| = |(A^t + E_n)^t| = |A + E_n|},$$

所以 $\underline{-|E_n + A| = |A + E_n|}$, 则 $\underline{|A + E_n| = 0}$.

目录

- 1 分块矩阵的行列式
- 2 伴随矩阵
- 3 行列式的应用

定理 8 (Cramer 法则)

$$|A| \neq 0$$

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^t \in \mathbb{R}^n$. 再设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ 是未知数向量. 则方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 确定当且仅当 A 可逆. 此时, 该方程组的唯一解是

有唯一解

$$x_i = \frac{\det(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(i-1)}, \mathbf{b}, \vec{A}^{(i+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)})}{\det(A)},$$

A

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

习题 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\underline{BX} = (1, 0, 0)^t$ 的解.

$$BX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解: 因为 $|B| = 1 \neq 0$, 所以方程有唯一解.

$$\text{计算 } x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = 3, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = 0, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = -2.$$

$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ 是 $BX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的唯一解.

子式与矩阵的秩

n 个向量 $n \leq m$

$v_1, v_2, \dots, v_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow A = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 $\text{rank}(A) = n$

$\Leftrightarrow$ 存在一个 n 阶子式不等于 0

定理 9

设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 非零. 则下列命题等价.

- ① $\text{rank}(A) = r$;
- ② A 中所有大于 r 阶的子式都等于零且存在一个 r 阶子式非零;
- ③ A 中所有 $r+1$ 阶的子式都等于零且存在一个 r 阶子式非零.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $n \leq m$
 $\text{rank}(A) = n$ $A = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix}_{m \times n}$ $n+1$

推论 10

设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $n \leq m$, 设 $A = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, 则 A 线性无关当且仅当 A 存在一个 n 阶子式非零.

例 1. 设 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 A 非列满秩, 则 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 线性相关.

$$\text{rank}(A) \neq 2$$

例 1. 设 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 A 非列满秩, 则 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 线性相关.

例 2. 设 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

所以 A 列满秩, 则 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 线性无关.

$$\text{rank}(A)=2$$

v_1, v_2, v_3 线性无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
 $\Leftrightarrow A$ 是满秩
 $\Leftrightarrow A$ 是可逆

例 3. 证明: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ 线性无关当且仅当 $\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_3$ 线性无关.

证明: 设 $A = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_3)$, $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, 因为

$$\begin{aligned}
 (\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_3) &= (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \underline{A} &= \underline{B} \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \\
 &= (\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_3)
 \end{aligned}$$

而且 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B).$$

即 $\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_3$ 线性无关 当且仅当 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 线性无关.

$\uparrow$
 $\text{rank}(A) = 3$
 $\uparrow$
 $\text{rank}(B) = 3$

严格对角占优矩阵

对角占优矩阵是计算数学中应用非常广泛的矩阵类，它较多出现于经济价值模型和反网络系统的系数矩阵及解某些确定微分方程的数值解法中，在信息论、系统论、现代经济学、网络、算法和程序设计等众多领域都有着十分重要的应用。

定义 11

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, 如果 $\underline{|a_{i,i}|} > \underline{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则称 A 为严格对角占优矩阵。

推论

$$A + t_0 E_n \quad t_0 \text{ 充分大时.}$$

$$\Rightarrow \underline{A + t_0 E_n} \text{ 可逆}$$

例 12

$$A = \begin{pmatrix} \underline{100} & \underline{2} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{-1000} & \underline{2} \\ \underline{4} & \underline{5} & \underline{200} \end{pmatrix} \text{ 是严格对角占优矩阵.}$$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{100} & 2 & -1 \\ -4 & \underline{1000} & -3 \\ 5 & 5 & \underline{100} \end{pmatrix}$$

$$|A| \neq 0$$

$$|A| > 0 \checkmark$$

定义 7

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, 如果 $|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则称 A 为严格对角占优矩阵。

命题 8

$$|A| \neq 0!$$

严格对角占优矩阵都是可逆矩阵。

定义 7

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, 如果 $\underline{|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则称 A 为严格对角占优矩阵。

命题 8

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

严格对角占优矩阵都是可逆矩阵。

证明: 反证. $|A| = 0$. 则 $AX = \vec{0}$ 存在非平凡解, 假设其为 $(x_0, x_1, \dots, x_n)^t$. 取 $\underline{t}$ 是 x_0 到 x_n 中 绝对值最大的那个分量的指标, 即 $\underline{|x_t|} \geq \underline{|x_i|}$, $i \neq t$, 则 $\underline{|x_t|} \neq 0$.

$$\Rightarrow |a_{tt}| \leq \sum_{j \neq t} |a_{t,j}| \quad \text{矛盾}$$

定义 7

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, 如果 $|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则称 A 为严格对角占优矩阵。

命题 8

严格对角占优矩阵都是可逆矩阵。

证明: 反证. $|A| = 0$. 则 $AX = \vec{0}$ 存在非平凡解, 假设其为 $(x_0, x_1, \dots, x_n)^t$. 取 t 是 x_0 到 x_n 中绝对值最大的那个分量的指标, 即 $|x_t| \geq |x_i|, i \neq t$, 则 $|x_t| \neq 0$. 由 $AX = \vec{0}$, 只看第 t 行, 可得

$$\underline{a_{t,1}x_1 + \dots + a_{t,n}x_n = 0}, \text{ 得 } \underline{a_{t,t}x_t = - \sum_{i \neq t} a_{t,i}x_i}.$$

定义 7

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, 如果 $|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则称 A 为严格对角占优矩阵。

命题 8

严格对角占优矩阵都是可逆矩阵。

证明: 反证. $|A| = 0$ 则 $AX = \vec{0}$ 存在非平凡解, 假设其为 $(x_0, x_1, \dots, x_n)^t$. 取 t 是 x_0 到 x_n 中绝对值最大的那个分量的指标, 即 $|x_t| \geq |x_i|, i \neq t$, 则 $|x_t| \neq 0$. 由 $AX = \vec{0}$, 只看第 t 行, 可得

$$a_{t,1}x_1 + \dots + a_{t,n}x_n = 0, \text{ 得 } a_{t,t}x_t = - \sum_{i \neq t} a_{t,i}x_i$$

$\leq \sum_{i \neq t} |a_{t,i}x_i|$

两边取绝对值, 得

$$\underline{|a_{t,t}x_t|} = \left| \sum_{i \neq t} a_{t,i}x_i \right| \leq \sum_{i \neq t} |a_{t,i}||x_i| \leq \sum_{i \neq t} |a_{t,i}|\underline{|x_t|}$$

因为 $|x_t| > 0$, 所以 $|a_{t,t}| \leq \sum_{i \neq t} |a_{t,i}|$. 这与严格对角占优矩阵的定义矛盾。

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}+t_0} & & \\ & \underline{a_{22}+t_0} & \\ & & \underline{a_{33}+t_0} \end{pmatrix}$$

命题 4

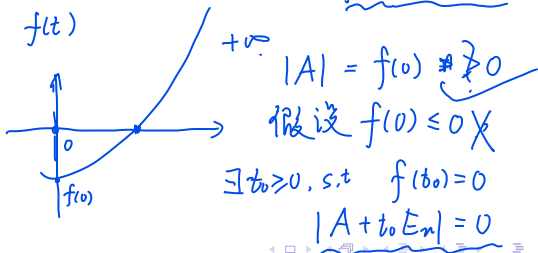
严格对角占优矩阵如果对角线元素都大于 0, 则行列式大于 0.

证明: 考虑矩阵 $A + tE_n$ 当 $t = t_0 \geq 0$ 时, $A + t_0E_n$ 依然是严格对角占优矩阵, 于是我们有 $|A + t_0E_n| \neq 0$.

命题 4

严格对角占优矩阵如果对角线元素都大于 0, 则行列式大于 0.

证明: 考虑矩阵 $A + tE_n$. 当 $t = t_0 \geq 0$ 时, $A + t_0E_n$ 依然是严格对角占优矩阵, 于是我们有 $|A + t_0E_n| \neq 0$. 又因为 $|A + tE_n|$ 是关于 t 次数为 n 的首一的多项式, 设为 $\underline{f(t)}$. 所以 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{f(t)} = \underline{+\infty}$.



命题 4

严格对角占优矩阵如果对角线元素都大于 0, 则行列式大于 0.

证明: 考虑矩阵 $A + tE_n$. 当 $t = t_0 \geq 0$ 时, $A + t_0E_n$ 依然是严格对角占优矩阵, 于是我们有 $|A + t_0E_n| \neq 0$. 又因为 $|A + tE_n|$ 是关于 t 次数为 n 的首一的多项式, 设为 $f(t)$. 所以 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. 又因为 $f(t)$ 是连续函数, 所以 $f(0) > 0$, 否则 $f(t)$ 在 $[0, \infty]$ 之间有零点, 矛盾.

谢谢！