1.解:

$$D(1,x,x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}:=A$$

$$xD(1,x,x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ xD 的所有特征根为 0, 1, 2.

V^0 对应 $\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 的解空间, $\Rightarrow$ 其解空间为 $\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$.

类似地可计算 V^1 对应解空间 $\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$, V^2 对应解空 $\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$.

$\Rightarrow$ xD 的所有特征向量为 $\mathbb{R}\langle 1\rangle\cup\langle x\rangle\cup\langle x^2\rangle\setminus\{0\}$, 可对角化.

$D^2+2D+\varepsilon$ 对应的方阵(在基底 $(1,x,x^2)$ 下)为

$$B:=A^2+2A+E=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\chi_B=(\lambda-1)^3$, $\Rightarrow$ $D^2+2D+\varepsilon$ 的特征根为 1.

V^1 对应的是 $\begin{pmatrix}0&-2&-2\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 的解空间, 其解空间为 $\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$.

$\Rightarrow D^2+2D+\varepsilon$ 的特征向量为 $\{c\mid c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$.

$\dim(V^1)=1\neq 3$ $\Rightarrow$ 算子不可对角化.

$$(x^2D^3+D)(1,x,x^2)=x^2D^3(1,x,x^2)+A$$
$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ x^2D^3+D 的所有特征根为 0, 对应的特征向量为 $\{c\mid c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

$\dim(V^1)=1\neq 3$, $\Rightarrow$ 算子不可对角化.

2. 法一：化对角

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $\chi_A=t(t-2)$

$\Rightarrow$ A的特征值为 $0, 2$.

$t_1=0$, $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ 的解空间为 $\langle\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\rangle$, $\Rightarrow V^0=\langle\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\rangle$.

令 $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

$t_2=2$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ 的解空间为 $\langle\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\rangle$, $\Rightarrow V^2=\langle\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\rangle$

令 $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

令 $P=(\vec{v_1},\vec{v_2})=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

经计算 $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $A^n=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 2^n\\ 0 & -2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1} & -2^{n-1}\\ -2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}$

法二：(Hamiton-cayley 定理加强版)

设 $A\in\mathcal{L}(V)$. 则

(i) $\chi_A(A)=0$. 即 $\mu_A(t)\mid\chi_A(t)$

(ii) $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因式是 $\mu_A(t)$ 的因子.

由 $\chi_A(A)=A^2-2A=0 \quad\Rightarrow A^2=2A$

$A^n=2A^{n-1}=\cdots\cdots=2^{n-1}A=2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

3. Def (循环子空间) 设 $A\in\mathcal{L}(V)$ 和 $\vec{v}\in V$. 由 $\vec{v}, A(\vec{v}), A^2(\vec{v}), \cdots$ 生成的子空间称为由A和 $\vec{v}$ 生成的循环子空间，记为 $F[A]\cdot\vec{v}$.

prop. 设 $A\in\mathcal{L}(V)$ 和 $\vec{v}\in V$.

(i) $F[A]\cdot\vec{v}=\{P(A)(\vec{v})\mid P(t)\in F[t]\}$

(ii) $F[A]\cdot\vec{v}$ 是 A-不变的.

(iii) 设 $d=\deg(\mu_{A,\vec{v}})$. 则 $\vec{v}, A(\vec{v}), \cdots, A^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[A]\cdot\vec{v}$ 的一组基.

特别地，$d=\dim(F[A]\cdot\vec{v})$.

的多项式，非零，次数最小的, 通过A零化$\vec{v}$的多项式称为由A零化$\vec{v}$的极小多项式
记为$\mu_{A,\vec{v}}$，通常是首一的.

Prop. 设$A\in\mathcal{L}(V)$，则存在$\vec{v}\in V$, s.t $\mu_{A,\vec{v}}=\mu_A$

3 (i) $A\vec{v}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim(\mathbb{R}[A]\cdot\vec{v})=1.$

$A\vec{w}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $A^2\vec{w}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

易得$\vec{w}, A\vec{w}, A^2\vec{w}$线性无关，故$\dim(\mathbb{R}[A]\cdot\vec{w})=3$

(ii) 由于$\dim(\mathbb{R}[A]\cdot\vec{w})=3$，故$\mathbb{R}^3$是A-循环的.

Def 设$A\in\mathcal{L}(V)$，$\vec{v}\in V$. 如果$V=F[A]\cdot\vec{v}$，则称A是V的循环算子，$\vec{v}$是V中
循环向量，V是关于A和$\vec{v}$的循环空间，简称A-循环空间

Thm 设$\dim(V)=n$. $A\in\mathcal{L}(V)$. 则V是A-循环的 $\Leftrightarrow \mu_A=\chi_A$

记 $\chi_A=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t&-1&0\\-1&t&1\\0&-1&t\end{vmatrix}=t^3.$

由 Hamilton-Cayley 定理可知 $\mu_A\mid\chi_A$，但$A, A^2\neq O$

$\mu_A=\chi_A=t^3$.

$\Rightarrow \mathbb{R}^3$是A-循环的.

4. Pf: 由V是A-循环的，故$\exists\,\vec{v}\in V$, s.t $V=F[A]\cdot\vec{v}$.

由$V=U_1\oplus U_2$，故$\exists!\,\vec{v_1}\in U_1$, $\vec{v_2}\in U_2$, s.t $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$

下证 $U_1=F[A]\cdot\vec{v_1}$, $U_2=F[A]\cdot\vec{v_2}$

⇒ $\vec{u} = P(A)(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = P(A)\vec{v_1} + P(A)\vec{v_2}$

由 $\vec{v_1}\in U_1$，$\vec{v_2}\in U_2$，U_1, U_2是A子空间，故 $P(A)\vec{v_1}\in U_1$，$P(A)\vec{v_2}\in U_2$

又由于 $\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}$，$\vec{u}\in U_1$，$\vec{0}\in U_2$，

由直和分解唯一性可知 $P(A)\vec{v_2}=\vec{0}$

⇒ $\vec{u}=P(A)\vec{v_1}\in F[A]\cdot\vec{v_1}$

显然 $F[A]\vec{v_1}\subset U_1$

⇒ $F[A]\vec{v_1}=U_1$

同理 $U_2=F[A]\cdot\vec{v_2}$

⇒ U_1和U_2都是A-循环子空间.

5. 证明：由A可对角化 ⇒ $\mu_A(t)$在$F[t]$中可以分解为两两互素一次因子之积，由命题5.3可知，$\mu_{A_U}|\mu_A$ ⇒ μ_{A_U}在$F[t]$中可以分解为两两互素一次因子之积 ⇒ A_U也可对角化.

命题5.3. 设$A\in\mathcal{L}(V)$，U是A的d维不变子空间，$0<d<n$. 则存在V的一组基使得A在该基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}B&C\\0&D\end{pmatrix}$$

其中$B\in M_d(F)$是A_U的某个矩阵表示：$\mu_{A_U}|\mu_A$，$\mu_B|\mu_A$，$\mu_D|\mu_A$.

Pf: (i) claim: 若V^λ为A的特征子空间，则V^λ为B不变子空间

$\forall \vec{v}\in V^\lambda$，$A(B\vec{v})=BA\vec{v}=B(\lambda\vec{v})=\lambda B\vec{v}$

⇒ $B\vec{v}\in V^\lambda$

⇒ V^λ为B的不变子空间

$\chi_A\in\mathbb{C}[t]\setminus\mathbb{C}$，故$\chi_A$在$\mathbb{C}$中必有一个根. 故有非零的特征向量.

由$A\in M_n(\mathbb{C})$，故A在$\mathbb{C}$中存在特征值λ，V^λ为其对应的特征子空间. 由claim可知，令 $H=B|_{V^\lambda}$ 有意义，则 $H\in\mathcal{L}(V^\lambda)$，且$H$存在特征值$\lambda_1$对应一个特征向量 $\vec{v_1}\in V^\lambda$非零

⇒ $H(\vec{v_1})=B\vec{v_1}=\lambda_1\vec{v_1}$

由$\vec{v_1}\in V^\lambda$，故$A\vec{v_1}=\lambda\vec{v_1}$

⇒ $\vec{v_1}$是A和B有公共的特征向量.

(ii) 由(i)可知：$\exists\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$，$\vec{v}\in\mathbb{C}^n$，s.t $A\vec{v}=\lambda_1\vec{v}$，$B\vec{v}=\lambda_2\vec{v}$。下面用数学归纳法对n作归纳，n=1时显然，假设命题对n-1成立。

由 $\vec{v}:=\vec{e_1}$ 可扩充成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基底 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$。令 $P_1=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})$

则 $P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$，$P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}\lambda_2 & *\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$

由 $AB=BA \Rightarrow P_1^{-1}AP_1P_1^{-1}BP_1=P_1^{-1}BP_1P_1^{-1}AP_1$

$\Rightarrow A_1B_1=B_1A_1$

由归纳假设可知，$\exists\ P_2\in GL_{n-1}(\mathbb{C})$，s.t $P_2^{-1}A_1P_2=D_1$，$P_2^{-1}B_1P_2=D_2$，D_1与D_2均为(n-1)阶上三角矩阵。令 $P_2'=\begin{pmatrix}1&0\\0&P_2\end{pmatrix}$。

令 $P=P_1P_2'$，则 $P^{-1}AP=P_2'^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2'=\begin{pmatrix}1&\\&P_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&P_2\end{pmatrix}$

$\in M_n(\mathbb{C})$

$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\cdots * \\ \vdots & P_2^{-1}A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & P_2^{-1}A_1P_2 \\ 0 & \end{pmatrix}$

同理 $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\lambda_2 & *\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & D_2 \\ 0 & \end{pmatrix}$ $\qquad=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & D_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exists P\in M_n(\mathbb{C})$，s.t $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为上三角矩阵。

可对角化的另一等价viewpoint

A可对角化 $\Leftrightarrow$ V是一维A-不变子空间的直和

Pf："$\Rightarrow$" A可对角化，则$\exists$V的一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in F$，s.t

$A(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

令 $W_i=\langle\vec{e_i}\rangle$，$V=\bigoplus_{i=1}^{n}W_i$ 且 $AW_i\subset W_i$，$\dim W_i=1$

"$\Leftarrow$" 若V是一维A-子空间的直和，

则 $\exists W_i\subset V$，$\dim(W_i)=1$，s.t $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_n$

$\Rightarrow \exists\vec{e_i}\in V$，s.t $W_i=\langle\vec{e_i}\rangle$，$i=1,2,\cdots,n$。

$AW_i\subset W_i \Rightarrow \exists\lambda_i\in F$，s.t $A\vec{e_i}=\lambda_i\vec{e_i}$，$i=1,2,\cdots,n$

$\Rightarrow \exists$V的一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$，s.t

$A(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

Remark. 一维A-子空间是A-不可分的，从而是A-循环。

(不可分子空间判定准则) 设$A\in\mathcal{L}(V)$，U是A-子空间，则U是A-不可分的
$\Leftrightarrow$ (i) U是A-循环子空间
(ii) M_U是$F[t]$中某个不可约多项式的幂次。

A-不可分定义. 设$A\in\mathcal{L}(V)$，U是A-子空间，如果U不能写成两个非零的A-子空间的直和，则称U是A-不可分的。

延伸

设 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $AB=BA$ 且 B 是幂零的，证明：$\chi_A(t)=\chi_{A+B}(t)$.

解：由(6)己证知，$\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$, s.t $S=P^{-1}AP$ 和 $T=P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵

B 幂零 $\Rightarrow T$ 幂零 $\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}$, s.t $T^n=0$

设 $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $T^2=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & * \\ & \lambda_2^2 \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{pmatrix}$, ……, $T^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

$\Rightarrow$ $S+T$ 与 S 的主对角线上元素相同

$\Rightarrow \chi_S=\chi_{S+T}$

由 $A\sim_s S$, $A+B\sim_s S+T$

$\Rightarrow \chi_A=\chi_{A+B}$（特征多项式是相似不变量）