第十五周习题课

—— 作业讲解.

1. 设

$$D: \mathbb{R}[x]^{(3)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(3)}$$
$$f(x) \longmapsto f'(x)$$

求线性算子 xD, $D^2+2D+\mathcal{E}$ 和 x^2D^3+D 的所有特征根和特征向量，并说明这三个线性算子中哪些是可对角化的，哪些不是.

解：计算可得 xD, $D^2+2D+\mathcal{E}$ 和 x^2D^3+D 在 $1, x, x^2$ 下的矩阵分别为

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 对于 xD，计算可得特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$.

$$V^{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V^{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V^{\lambda_3} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

因为 xD 有三个线性无关的特征向量，所以 xD 可对角化.

(2) 对于 $D^2+2D+\mathcal{E}$，计算得特征多项式为 $(t-1)^3$，$\lambda=1$

$V^{\lambda} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$，由于$\lambda$的几何重数小于代数重数，所以 $D^2+2D+\mathcal{E}$ 不可以对角化.

(3) 对于 x^2D^3+D，计算得特征多项式为 t^3，$\lambda=0$.

$V^{\lambda} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$，由于$\lambda$的几何重数小于代数重数，所以 x^2D^3+D 不可以对角化.

2. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

把 A^n 表示为一个 2 阶矩阵，其中 n 是任意正整数.

当特征不为2时，

解：$\chi_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}=t^2-2t$.

所以 $A^2-2A=0$，则 $n\geq 2$ 时，

$$A^n = A^{n-2}\cdot 2A = 2A^{n-1}$$

$$=4A^{n-2}=\cdots=2^{n-1}A=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

$n=1$ 时，$A^n=A$. □

当特征为2时，$A^n=\begin{cases} A & n=1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & n\geq 2 \end{cases}$.

3. 设 $\mathcal{A}\in L(\mathbb{R}^3)$ 在标准基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

设 $v=(1,0,1)^t$ 和 $w=(1,0,0)^t$.

(i) 计算 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot v)$ 和 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot w)$.

(ii) 判断 $\mathbb{R}^3$ 是不是 $\mathcal{A}$-循环的，并说明理由.

解：(i) $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathcal{A}(\vec{v})=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，所以 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot v=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$，则

$$\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot v)=1.$$

$\vec{w}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathcal{A}(\vec{w})=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathcal{A}^2(\vec{w})=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，因为 $\vec{w},\mathcal{A}(\vec{w}),\mathcal{A}^2(\vec{w})$ 线性无关，$\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot w)\leq \dim(\mathbb{R}^3)=3$. 所以

$$\vec{w},\mathcal{A}(\vec{w}),\mathcal{A}^2(\vec{w})$$

是 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot w$ 的一组基，则 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot w)=3$.

(ii) $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}[A]\cdot w$，所以 $\mathbb{R}^3$ 是 A 循环的.

复习：设 $V=F[A]\cdot v$ 为循环子空间.

(1) 如何计算通过 A 零化 v 的极小多项式？

计算 $v, Av, A^2v, \cdots$，直到第一次出现

$$v, Av, \cdots, A^s v \text{ 线性相关}$$

则存在 $\alpha_0, \cdots, \alpha_s \in F$，使得

$$\alpha_0 v+\alpha_1 Av+\cdots+\alpha_s A^s v$$

令 $\mu_{A,v}=\frac{1}{\alpha_s}(\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_s x^s)$ 即为零化 v 的极小多项式.

(2) $\dim(F[A]\cdot v)=\deg(\mu_{A,v})$.

4. 设 $A\in\mathcal{L}(V)$ 且 V 是 A-循环的，再设 $U_1, U_2\subset V$ 是 A-子空间，满足 $V=U_1\oplus U_2$，证明：U_1, U_2 都是 A-循环子空间.（问 $U_1=F[A]u_1$？，$U_2=F[A]u_2$？）

证明：因为 V 是 A-循环的，所以存在 $v\in V$，使得

$$V=F[A]v.$$

设 $v=u_1+u_2$，$u_1\in U_1$，$u_2\in U_2$. 先证 $F[A]v=F[A]u_1\oplus F[A]u_2$.

对任意 $f(A)v\in F[A]v$，有 $f(A)v=f(A)(u_1+u_2)=f(A)u_1+f(A)u_2$
$\in F[A]u_1+F[A]u_2$

所以 $F[A]v\subset F[A]u_1+F[A]u_2$，显然 $F[A]u_1+F[A]u_2\subset V$，所以

$$V=F[A]u_1+F[A]u_2.$$

设 $y\in F[A]u_1\cap F[A]u_2$，则存在 $f_1, f_2\in F[A]$，使得

$$y=f_1(A)u_1=f_2(A)u_2$$

因为 U_1, U_2 是 A 不变的，所以 $f_1(A)u_1\in U_1$，$f_2(A)u_2\in U_2$，则

$y \in U_1 \cap U_2$.

所以 $y=0$，则 $F[A]u_1 + F[A]u_2$ 是直和．于是有

$$V = F[A]u_1 \oplus F[A]u_2$$

因为 $F[A]u_1 \subset U_1$，$F[A]u_2 \subset U_2$，所以

$$\dim(F[A]u_1) \le \dim U_1,\quad \dim(F[A]u_2) \le \dim U_2$$

又因为 $\dim(F[A]u_1) + \dim(F[A]u_2) = \dim V = \dim U_1 + \dim U_2$，所以

$$\dim(F[A]u_1) = \dim U_1,\quad \dim(F[A]u_2) = \dim U_2$$

则 $U_1 = F[A]u_1$，$U_2 = F[A]u_2$ 为循环子空间．

□.

5. 设 $A \in L(V)$ 可对角化．U 是非零的子空间，证明：限制算子 A_U 也可对角化．

错解：设 $v_1, \cdots, v_s, v_{s+1}, \cdots, v_n$ 是 V 的一组基，使得

$$A(v_1, \cdots, v_n) = (v_1, \cdots, v_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

设其中 $v_1, \cdots, v_s$ 是 U 的一组基，则 $A_{U_1}(v_1, \cdots, v_s) = (v_1, \cdots, v_s)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \end{pmatrix}$

所以 A_{U_1} 可以对角化．

（问题在于为什么这样的基可以找到？）

正解：设 $u_1, \cdots, u_s$ 是 U 的一组基，扩充为 V 的一组基 $u_1, \cdots, u_s, v_{s+1}, \cdots, v_n$，则 A 在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} B_{s\times s} & * \\ O_{(n-s)\times s} & C_{(n-s)\times(n-s)} \end{pmatrix}$$

因为 A 可以对角化，所以 μ_A 是互素的一次因子的乘积．

而 $\mu_B \mid \mu_A$，所以 μ_B 也是互素的一次因子的乘积．

又因为 B 是 $A|_u$ 下的矩阵，所以 $A|_u$ 可对角化.

$\square$

6. 设 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ 且 $AB=BA$，证明：

(i) A 和 B 有公共的特征向量；

(ii) 存在 $P\in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为上三角矩阵

证明：(i) 设 v 是 A 的特征向量，设 $v\in V_A^{\lambda}$，则

$$Av=\lambda v,$$

所以 $ABv=BAv=\lambda Bv$，所以 $Bv\in V_A^{\lambda}$，则 V^{λ} 是 B-不变子空间，令 $\tilde{B}=B|_{V^{\lambda}}$，则 $\tilde{B}$ 的特征值存在，设为 λ'，则存在 $v'\in V_A^{\lambda}$，使得

$$\tilde{B}v'=\lambda' v',$$

所以 $Bv'=\lambda' v'$，又因为 $v'\in V_A^{\lambda}$，所以 $Av'=\lambda v'$，则 v' 既是 A 的特征向量，又是 B 的特征向量.

(ii) 设 v_1 是 A,B 公共的特征向量，把 v_1 扩充成 V 的一组基 $v_1,\dots,v_n$，则

$$A(v_1,\dots,v_n)=(v_1,\dots,v_n)\begin{pmatrix}\lambda_A & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$B(v_1,\dots,v_n)=(v_1,\dots,v_n)\begin{pmatrix}\lambda_B & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

，所以存在 $P\in GL_{n-1}(\mathbb{C})$，使得 $P_0^{-1}AP_0=\begin{pmatrix}\lambda_A & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$，$P_0^{-1}BP_0=\begin{pmatrix}\lambda_B & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$.

因为 $AB=BA$，所以 $A_1B_1=B_1A_1$，由归纳法可知存在 $P_1\in GL_{n-1}(\mathbb{C})$，使得 $P_1^{-1}A_1P_1$ 和 $P_1^{-1}B_1P_1$ 为上三角矩阵，所以 $P=P_0\begin{pmatrix}1 & \\ & P_1\end{pmatrix}$ 为所求.