解：1.

$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$\chi_A=(t-1)^2$，

$\Rightarrow$ A的特征值只有1.

$E-A=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \dim V^1=1$，故 $J_2(1)$ 在 J_A 中出现1次.

$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$，$\chi_B=(t-1)(t-2)$

$\Rightarrow$ B有两个不同的特征值.

$\Rightarrow J_B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}2&-1\\4&2\end{pmatrix}$，$\chi_C=\begin{vmatrix}t-2&1\\-4&t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2+4=0$

$\Rightarrow t_1=2+2i$，$t_2=2-2i$

$\Rightarrow J_C=\begin{pmatrix}2+2i&0\\0&2-2i\end{pmatrix}$

注意：$\forall A\in M_n(\mathbb{C})$，若 $J_A=\begin{pmatrix}J_{d_1}(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&J_{d_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}$，

$\mu_{J_{d_i}}(\lambda_i)=(t-\lambda_i)^{d_i}$

$d_1+d_2+\cdots+d_k=n$

$\operatorname{rank}(J_{d_i}(\lambda_i))=d_i-1$.

$\operatorname{rank}(J_A)=n-k$.

$\rightarrow$ λ在对角线上出现次数

$\chi_A=(t-\lambda_1)^{\boxed{d_1}}\cdots(t-\lambda_k)^{d_k}$.

$\Rightarrow$ 代表λ₁出现在 J_A 中最大Jordan块阶数

$\mu_A=\operatorname{lcm}((t-\lambda_1)^{d_1},\ldots,(t-\lambda_k)^{d_k})=(t-\lambda_1)^{\boxed{e_1}}\cdots(t-\lambda_k)^{e_k}$.

注意到 $e_i\le d_i$

$\dim V^{\lambda_i}$：代表出现 λ_i 的Jordan块的个数.

2. $\chi_A=|tE-A|=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$

①若 $\lambda_1\ne\lambda_2$，则A可对角化（∵ 理解课上教授讲过，$A\in M_n(F)$，若 χ_A 在F中有不同的根，则A可对角化）.

$\therefore J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

若 $\lambda_1=\lambda_2$，则 $\chi_A=(t-\lambda)^2$，∵ A不是数乘矩阵且 $\mu_A \mid \chi_A$.

$\Rightarrow \mu_A=(t-\lambda)^2$

$\Rightarrow$ 关于λ的Jordan块最大阶数也为2

$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

② $\chi_B=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$

若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 B 可对角化，故 $J_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

若 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，$\chi_B=(t-\lambda)^2$，可得 $J_B=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

3.(a) $\chi_A(t)=(t-3)^4(t+2)$，$\operatorname{rank}(A-3E)=2$ $\Rightarrow \dim V^3=5-2=3$

$\Rightarrow$ J_A 中以 3 为特征值的 Jordan 块出现 3 次

注意到 3 的代数重数为 4， $4=1+1+2$

$$J_A=\begin{pmatrix}3 &&&& \\ & 3 &&& \\ && 3 & 1 & \\ &&& 3 & \\ &&&& -2\end{pmatrix}$$

(b)(i) $\operatorname{rank}(A-3E)=1$，$\dim V^3=4$

$$J_A=\begin{pmatrix}3 &&&& \\ & 3 &&& \\ && 3 && \\ &&& 3 & \\ &&&& -2\end{pmatrix}$$

(ii) $\operatorname{rank}(A-3E)=3$，$\dim V^3=5-3=2$.

$4=2+2$ $\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}-2 && \\ & J_2(3) & \\ && J_2(3)\end{pmatrix}$

$=1+3$ $\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}-2 && \\ & 3 & \\ && J_3(3)\end{pmatrix}$

不能唯一地确定

(iii) $\operatorname{rank}(A-3E)=4$，$\dim V^3=1$

$$J_A=\begin{pmatrix}-2 & \\ & J_4(3)\end{pmatrix}$$

②

4. Pf: "⇐" A 幂零，则 $A^m=0$，$\exists m\in\mathbb{N}^+$. $\Rightarrow \chi_A \mid t^m \Rightarrow A$ 只有 0 特征值.

(1) 由 $A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$，故 $A^k\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix}$ ∴

$\Rightarrow \lambda_1^k=0=\cdots=\lambda_n^k$.

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

∴ $A\sim_s\begin{pmatrix}0 & & *\\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}$，$A^k\sim_s\begin{pmatrix}0 & & *\\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}$，$k=1,2,\cdots,n$

$\Rightarrow \operatorname{tr}(A^k)=0$，$k=1,2,\cdots,n$.

"⇒"：设 $\chi_A=t^{n_0}(t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_s)^{n_s}$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，两两不同

复数域上任一矩阵可上三角化知，$\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$，上三角复矩阵 B，使得 $B=P^{-1}AP$

$$B=\begin{pmatrix}0 & & & & & & & *\\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_s \ \cdots \ \lambda_s\end{pmatrix}$$

，$B^k=P^{-1}A^kP$ 为上三角矩阵，

$$B^k=\begin{pmatrix}\underbrace{0\ \cdots\ 0}_{n_0} & & & \\ & \underbrace{\lambda_1^k\ \cdots\ \lambda_1^k}_{n_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\lambda_s^k\ \cdots\ \lambda_s^k}_{n_s}\end{pmatrix}$$

$A^k\sim_s B^k \Rightarrow \operatorname{tr}(B^k)=\operatorname{tr}(A^k)=0$. (trace是相似不变量)

注意到 $s\leq n$.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} n_i\lambda_i^k=0$，$k=1,2,\cdots,s$.

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_s^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \cdots & \lambda_s^s\end{pmatrix}}_{G}\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\\ \vdots\\ n_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$|G|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \cdots & \lambda_s^{s-1}\end{vmatrix}\neq 0$$

$\Rightarrow n_1=n_2=\cdots=n_s=0$

$\Rightarrow \chi_A(t)=t^{n_0}=t^n$

由 Hamilton-Cayley 定理，

$A^n=0$.

$\Rightarrow A$ 是幂零的.

注意: $A\in M_n(\mathbb{C})$, A幂零 $\Leftrightarrow$ A的特征值只有0

"$\Rightarrow$" ✓

"$\Leftarrow$" 特征值只有0 $\Rightarrow \chi_A = t^n \Rightarrow A^n = 0 \Rightarrow A$幂零 (Hamilton - Cayley定理

5. Pf: $A\in M_n(\mathbb{C})$可对角化, 故 $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, s.t.

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

由 $tr(A^k)=0$, $k=1,2,\cdots,n \Leftrightarrow A$是幂零矩阵

$\Rightarrow A$为幂零矩阵

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

$\Rightarrow rank(A) = 0$

$\Rightarrow A = O$

复数域上线性算子的分解.

$A\in \mathcal{L}(V)$, $F=\mathbb{C}$. 证明: A是一个对角算子和一个幂零算子之和.

Pf: 设 $spec_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_s\}$, 则 $\exists m_1, \cdots, m_s \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\mu_A = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_s)^{m_s}$$

令 $K_i = \ker((\lambda_i E - A)^{m_i})$, $i=1,2,\cdots,s$. 则由(核的分解定理之极小多项式版), 可得

$$V = K_1 \oplus \cdots \oplus K_s$$

设 π_i是V到K_i关于上述直和的投影, 令

$$B = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_s\pi_s$$

则对于任意 $\vec{x_i} \in K_i$,

$$B(\vec{x_i}) = \lambda_1\pi_1(\vec{x_i}) + \cdots + \lambda_s\pi_s(\vec{x_i}) = \lambda_i\vec{x_i}$$

从而, $\vec{x_i} \in V_B^{\lambda_i}$. 由此得出 $K_i \subset V_B^{\lambda_i}$. 由上述直和和 $\cdot = V_B^{\lambda_1} + \cdots + V_B^{\lambda_s}$ 是直和可得, $K_i \subset V_B^{\lambda_i}$.

$$\Rightarrow V = V_B^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_B^{\lambda_s}$$

$\Rightarrow$ B可对角化

设 $C=A-B$. 我们证明 C 是幂零的.

先回顾投影变换的定义:

V 是域 F 上的线性空间, $V_1,\dots,V_k$ 是其子空间且 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$. 对 $i\in\{1,\dots,k\}$, 定义映射

$$\sigma_i: V\longrightarrow V$$
$$\vec{x}\longmapsto x_i$$

满足以下三条性质.

(a) $\forall i\in\{1,\dots,k\}$, $\sigma_i^2=\sigma_i$ (幂等性)

(b) $\forall i,j\in\{1,2,\dots,k\}$ 且 $i\neq j$, $\sigma_i\sigma_j=0$. (正交性)

(c) $\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_k=\varepsilon$ (完全性).

注意到 $\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_k$ 是完全正交幂等组, 由 $\varepsilon=\pi_1+\cdots+\pi_s$, 故 $A=A\pi_1+\cdots+A\pi_s$.

$$\Rightarrow \quad C=(A-\lambda_1\varepsilon)\pi_1+\cdots+(A-\lambda_n\varepsilon)\pi_s.$$

对 $\forall\ \vec{x}\in V$, $\exists\ \vec{x_1}\in K_1,\dots,\vec{x_s}\in K_s$, 使得

$$\vec{x}=\vec{x_1}+\cdots+\vec{x_s}\Rightarrow A\vec{x}=A\vec{x_1}+\cdots+A\vec{x_s}$$

$K_1,\dots,K_s$ 是 A-不变的, $\Rightarrow$ 对任意 $i\in\{1,2,\dots,s\}$,

$$\pi_i(A(\vec{x}))=A\vec{x_i}=A(\pi_i(\vec{x}))$$

$$\Rightarrow \pi_iA=A\pi_i \qquad \Rightarrow (A-\lambda_j\varepsilon)\pi_i=\pi_i(A-\lambda_j\varepsilon)\ ,\ i,j\in\{1,2,\dots,s\}$$

$$C^2=\sum_{i=1}^{k}(A-\lambda_i\varepsilon)^2\pi_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}(A-\lambda_i\varepsilon)(A-\lambda_j\varepsilon)\pi_i\pi_j$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(A-\lambda_i\varepsilon)^2\pi_i$$

$$\Rightarrow C^k=(A-\lambda_1\varepsilon)^k\pi_1+\cdots+(A-\lambda_s\varepsilon)^k\pi_s$$

令 $k=\max\{m_1,\dots,m_s\}$, 则

$$C^k(\vec{x})=(A-\lambda_1\varepsilon)^k\pi_1(\vec{x})+\cdots+(A-\lambda_s\varepsilon)^k\pi_s(\vec{x})=(A-\lambda_1\varepsilon)^k(\vec{x_1})+\cdots+(A-\lambda_s\varepsilon)^k(\vec{x_s})$$

$$=\vec{0}$$

$\Rightarrow C$ 幂零

例 $J_5(0)=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&1&\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}$ $\quad J_5^2(0)=\begin{pmatrix}0&0&1&&\\&0&0&1&\\&&0&0&1\\&&&0&0\\&&&&0\end{pmatrix}$.

下求$J_5^2(0)$的若当标准型.

$\chi_{J_5^2(0)}=t^5$, $\quad r_0=\mathrm{rank}(E_5)=5$, $\quad r_1=\mathrm{rank}(J_5^2(0))=3$

$p=t$, $d=1$

$\Rightarrow$ 0的几何重数为 $5-3=2$.

$\Rightarrow$ $J_5^2(0)$有2个关于0的Jordan块.

$r_2=\mathrm{rank}(J_5^4(0))=1$, $\quad r_3=\mathrm{rank}(J_5^6(0))=0$.

$\Rightarrow$ $n_1=5+1-2\times3=0$

$n_2=3+0-2\times1=1$

$n_3=1+0-2\times0=1$

$\Rightarrow$ 若当标准型为 $\begin{pmatrix}J_2(0)&\\&J_3(0)\end{pmatrix}$.