第十五周习题课

——复数域上的Jordan标准型

(直接跳过)

1. 记 $J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}$，则

① $(J_n(\lambda))^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & & * \\ & \lambda^n & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda^n\end{pmatrix}$

② $J_n(\lambda)-\lambda E_n=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}$，$rank(J_n(\lambda)-\lambda E_n)=n-1$

$(J_n(\lambda)-\lambda E_n)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0\end{pmatrix}$，$rank((J_n(\lambda)-\lambda E_n)^2)=n-2$

$\vdots$

$(J_n(\lambda)-\lambda E_n)^{n-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 0\end{pmatrix}$，$rank((J_n(\lambda)-\lambda E_n)^{n-1})=n-(n-1)=1$

$(J_n(\lambda)-\lambda E_n)^n=0$，$rank((J_n(\lambda)-\lambda E_n)^n)=0$

③ $\chi_{J_n(\lambda)}=(t-\lambda)^n$，$\mu_{J_n(\lambda)}=(t-\lambda)^n$.

2. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，则

$$A\sim_s\begin{pmatrix}J_{d_{1,1}}(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{d_{1,i_1}}(\lambda_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{d_{k,1}}(\lambda_k) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & J_{d_{k,i_k}}(\lambda_k)\end{pmatrix}$$

这里假设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 两两不同.

例.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim J_A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} J_2(2) & & & \\ & J_2(1) & & \\ & & J_2(1) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix}$$

即 $k=2$, $i_1=1$. $i_2=3$. $d_{1,1}=1$. $d_{2,1}=2$. $d_{2,2}=2$. $d_{2,3}=1$.

也就是说 A 的 Jordan 标准型中:

关于特征值 2 有 1 个 Jordan 块, 其中 2 阶块有 1 个

关于特征值 1 有 3 个 Jordan 块, 其中 2 阶块有 2 个, 1 阶块有 1 个.

问题: 给一个具体的矩阵 A, 计算 A 的 Jordan 标准型.

(通过 $\text{rank}(A-\lambda_i E)^p$ 确定).

事实1: $A\sim_s B \Rightarrow A^k\sim_s B^k$.

事实2: $A\sim_s B \Rightarrow A-\lambda E_n\sim_s B-\lambda E_n$

结合上述两个事实, $A-\lambda E\sim_s J_A-\lambda E_n$

$$(A-\lambda E)^k\sim_s (J_A-\lambda E)^k$$

$$\text{rank}((A-\lambda E)^k)=\text{rank}((J_A-\lambda E)^k)$$

设λ是A的特征值，假设$\chi_A=(t-5)(t-2)^6$.

① $n-\operatorname{rank}(A-\lambda E_n)$ 等于关于λ的Jordan块的个数，
即λ的几何重数 等于关于λ的Jordan块的个数.

例. $J_A=\begin{pmatrix}5&&&&&&\\&2&1&&&&\\&&2&1&&&\\&&&2&&&\\&&&&2&1&\\&&&&&2&\\&&&&&&2\end{pmatrix}$，则 $J_A-2E_n=\begin{pmatrix}3&&&&&&\\&0&1&&&&\\&&0&1&&&\\&&&0&&&\\&&&&0&1&\\&&&&&0&\\&&&&&&0\end{pmatrix}$

所以 $\operatorname{rank}(J_A-2E_n)=4$，关于2的Jordan块个数恰好为
$$n-4=7-4=3.$$
而 $\operatorname{rank}(A-2E_n)=\operatorname{rank}(J_A-2E_n)$，所以Jordan块的个数为
$$n-\operatorname{rank}(A-2E_n).$$

② $\operatorname{rank}(A-\lambda E)-\operatorname{rank}((A-\lambda E)^2)$ 等于关于λ 阶数大于等于2的Jordan块的个数.

例. $J_A=\begin{pmatrix}5&&&&&&\\&2&1&&&&\\&&2&1&&&\\&&&2&&&\\&&&&2&1&\\&&&&&2&\\&&&&&&2\end{pmatrix}$，则 $J_A-2E_n=\begin{pmatrix}3&&&&&&\\&0&1&&&&\\&&0&1&&&\\&&&0&&&\\&&&&0&1&\\&&&&&0&\\&&&&&&0\end{pmatrix}$

$(J_A-2E)^2=\begin{pmatrix}9&&&&&&\\&0&0&1&&&\\&&0&0&&&\\&&&0&&&\\&&&&0&0&\\&&&&0&0&\\&&&&&&0\end{pmatrix}$，$\operatorname{rank}((J_A-2E)^2)-\operatorname{rank}(J_A-E)=2$ 恰好为关于2的阶数大于等于2的Jordan块的个数.

所以 $\operatorname{rank}((A-2E)^2)-\operatorname{rank}(A-2E)=2$ 恰好为关于2的阶数大于等于2的Jordan块的个数.

③ $\operatorname{rank}\left((A-\lambda E)^2\right)-\operatorname{rank}\left((A-\lambda E)^3\right)$ 等于关于 λ 阶数大于等于 3 的 Jordan 块的个数.

$$J_A=\begin{pmatrix}3&&&&&&\\&2&1&&&&\\&&2&1&&&\\&&&2&&&\\&&&&2&1&\\&&&&&2&\\&&&&&&2\end{pmatrix},\quad (J_A-2E_n)^2=\begin{pmatrix}9&&&&&&\\&0&0&1&&&\\&&0&0&&&\\&&&0&&&\\&&&&0&0&\\&&&&0&0&\\&&&&&&0\end{pmatrix},\quad (J_A-2E_n)^3=\begin{pmatrix}27&&&&&&\\&0&0&0&&&\\&0&0&0&&&\\&0&0&0&&&\\&&&&0&0&\\&&&&0&0&\\&&&&&&0\end{pmatrix}$$

则 $\operatorname{rank}\left((J_A-2E_n)^2\right)-\operatorname{rank}\left((J_A-2E_n)^3\right)$ 恰好是关于 λ 阶数大于等于 3 的 Jordan 块的个数.

此时 $n-\operatorname{rank}\left((J_A-2E_n)^3\right)$ 等于 2 的代数重数, 停止.

作业. 1. $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\chi_A=(t-1)^2$.

因为 $\operatorname{rank}(A-1\cdot E_2)=1$, 所以有

$$n-1=1$$

个关于 1 的 Jordan 块, 则

$$A\sim_s J_A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

2. $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$, $\chi_B=(t-1)(t-2)$, 则 B 可对角化.

$$B\sim_s J_B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

$C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $\chi_C=t^2-4t+8=[t-(2+2i)][t-(2-2i)]$

所以C有两个Jordan块 $C\sim_s J_C=\begin{pmatrix}2+2i & \\ & 2-2i\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, $\chi_A=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$.

则当$\lambda_1\neq\lambda_2$时，A有两个Jordan块，$A\sim_s J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$

当$\lambda_1=\lambda_2$时，计算得 $2-\mathrm{rank}(A-\lambda_1E)=1$，所以A关于λ有一个Jordan块，则

$$A\sim_s J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix}$, $\chi_B=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$.

当$\lambda_1\neq\lambda_2$时，B可以对角化，则 $B\sim_s J_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

当$\lambda_1=\lambda_2$时，计算得 $2-\mathrm{rank}(B-\lambda_1E)=1$，
所以B关于λ有一个Jordan块，则

$$B\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

3. $\chi_A(t)=(t-3)^4(t+2) \Rightarrow A\in M_5(\mathbb{C})$

(a) 当 $\mathrm{rank}(A-3E)=2$ 时,

J_A 关于 3 有 3 个 Jordan 块，所以

$$J_A=\begin{pmatrix}3&1&&&\\&3&&&\\&&3&&\\&&&3&\\&&&&-2\end{pmatrix}$$

(b) 同理，通过 $\mathrm{rank}(A-3E)$ 确定 Jordan 块个数.

4. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，证明：$tr(A^k)=0$, $k=1,2,\cdots,n$ 当且仅当 A 是幂零的.

证：$\Leftarrow$ 当 A 是幂零的，则 A 的特征值全为 0.

所以 $A\sim_s J_A=\begin{pmatrix}0_0&&*\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}$,

则 $A^k\sim_s J_A^k=\begin{pmatrix}0_0&&*\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}$,

因为 tr 是相似不变量，所以

$tr(A^k)=tr(J_A^k)=0$. $k=1,2,\cdots,n$.

$\Rightarrow$ 设 $J_A=\begin{pmatrix}\underbrace{0\ \cdots\ 0}_{n_0}&&&*\\&\underbrace{\lambda_1\cdots\lambda_1}_{n_1}&&\\&&\ddots&\\&&&\underbrace{\lambda_l\cdots\lambda_l}_{n_l}\end{pmatrix}$，则 $J_A^k=\begin{pmatrix}\underbrace{0\ \cdots\ 0}_{n_0}&&&*\\&\underbrace{\lambda_1^k\cdots\lambda_1^k}_{n_1}&&\\&&\ddots&\\&&&\underbrace{\lambda_l^k\cdots\lambda_l^k}_{n_l}\end{pmatrix}$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 两两不同且不为 0.

则 $tr(J_A^k)=n_1\lambda_1^k+\cdots+n_l\lambda_l^k=0$，$k=1,\cdots,n$.

所以 $\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_l\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_l^2\\ & & \vdots & \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & & \lambda_l^n\end{pmatrix}_{n\times l}}_{A=}\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\\ \vdots\\ n_l\end{pmatrix}=0$

因为 A 列满秩，所以 $n_1=n_2=\cdots=n_l=0$.

则 J_A 的特征值全为 0，则 A 的特征多项式为 t^s.

所以 A 为幂零矩阵.

$\square$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 不一定互不相同

方法二：设 $J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，类似推导可得

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n&=0\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2&=0\\ &\vdots\\ \lambda_1^n+\lambda_2^n+\cdots+\lambda_n^n&=0\end{aligned}\Rightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_n^n\end{vmatrix}=0$$

归纳证明断言：$\forall k\in\mathbb{Z}^+$

若存在 $\vec{v}_i$，使 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \cdots & \lambda_k^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_k\end{pmatrix}=\vec{0}$，$v_i\neq\vec{0}$, $i=1,\cdots,k$. 则 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$

当 $k=1$ 时，显然成立. 假设当 $k-1$ 时断言成立，对 k 时.

$\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \cdots & \lambda_k^k\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k\prod_{1\le i<j\le k}(\lambda_i-\lambda_j)=0\Rightarrow\exists i\in\{1,\cdots,k\}$，$\lambda_i=0$

或 $\exists i,j\in\{1,\cdots,k\}$，$i\neq j$，$\lambda_i-\lambda_j=0$

当$\lambda_i=0$时，不妨设$\lambda_1=0$，则

$$\begin{pmatrix}\lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_2\\ v_3\\ \vdots\\ v_k\end{pmatrix}=0 \xRightarrow{\text{归纳假设}} \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

$v_2,\cdots,v_k$ 都不全0，

当$\lambda_i=\lambda_j$时，不妨设$\lambda_1=\lambda_2$，则

$$\begin{pmatrix}2\lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 2\lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_2\\ \vdots\\ v_k\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2v_2\\ \vdots\\ v_k\end{pmatrix}=0$$

$$\xRightarrow{\text{归纳假设}} \lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$$

所以根据归纳法，断言成立.