1.(a) $\chi_A(t)=|tE-A|=(t-2)(t-4)^2$

$\chi_B(t)=|tE-B|=(t-2)(t-4)^2$

$A=\begin{pmatrix}6&2&-2\\-2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&2&2\\-2&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(b) 由 Hamilton-Cayley 定理, $\mu_A\,|\,\chi_A$, $\mu_B\,|\,\chi_B$.

$4E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\-2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(4E-A)=3-2=1$

$\Rightarrow$ 含有4的若当块个数为2.

$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}2&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ A可对角化, 故μ_A无重因子 $\Rightarrow \mu_A=(t-2)(t-4)$.

$4E-B=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\2&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(4E-B)=3-2=1$

$\Rightarrow$ 含有4的若当块个数为1

$\Rightarrow J_B=\begin{pmatrix}2&\\&J_2(4)\end{pmatrix}$

(c) A的初等因子组为 $\{t-2,t-4,t-4\}$.

B的初等因子组为 $\{t-2,(t-4)^2\}$

(d) $J_A=\begin{pmatrix}2&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$, $J_B=\begin{pmatrix}2&\\&J_2(4)\end{pmatrix}$

2.(a) pf: 幂零矩阵 A, B 的特征根均为0.

$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)\Rightarrow \dim V_A^0=\dim V_B^0$

$\Rightarrow$ 对A, B的0的几何重数相同

$\mu_A=\mu_B \Rightarrow$ 关于A, B对0的 Jordan 块最大阶数相同

$n=4$时, ∵A幂零, $\exists k\in\mathbb{Z}^+$, s.t. $A^k=0\Rightarrow |A|^k=0\Rightarrow |A|=0\Rightarrow$ A不满秩

同理, B不满秩.

法一: 下从 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=0,1,2,3$ 分类讨论.

10

① $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=0 \Rightarrow A=B=0 \Rightarrow A\sim_s B$

② $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=1$. 则关于0的Jordan块有3块, $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B$.

$$4=\underset{1}{\square}+\underset{1}{\square}+\underset{2}{\square}$$

③ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=2$, 关于0的Jordan块有2块. $4=\underset{1}{\overset{2}{\square}}+\underset{3}{\overset{2}{\square}}$

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_3(0)\end{pmatrix}=J_B, \quad \text{or } J_A=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B$$

若 $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_3(0)\end{pmatrix}$, $J_B=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0)\end{pmatrix}$, 则与 $m_A=m_B$ 矛盾).

④ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=3$, 关于0的若当块只有1块

$$J_A=J_4(0)=J_B$$

若从极小多项式讨论, 以 $m_A=m_B=t, t^2, t^3, t^4$ 分类讨论

① $m_A=m_B=t \Rightarrow A=B=0 \Rightarrow A\sim_s B$

② $m_A=m_B=t^2$, 关于0的Jordan块最大阶数是2.

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B \text{ or } J_A=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B$$

③ 若有 $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_2(0)\end{pmatrix}$, $J_B=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0)\end{pmatrix}$, 故 $\operatorname{rank}(A)\neq\operatorname{rank}(B)$. $\rightarrow\leftarrow$

$m_A=m_B=t^3$, 关于0的Jordan块最大阶数是3,

$$J_A=J_B=\begin{pmatrix} J_3(0) & \\ & J_1(0)\end{pmatrix}$$

④ $m_A=m_B=t^4$, 关于0的Jordan块最大阶数为4, $J_A=J_B=J_4(0)$.

(2) $n=5$, $A\sim_s B$

① $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=0$, $A=B=0 \Rightarrow A\sim_s B$

② $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=1$, $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & & \\ & J_1(0) & & \\ & & J_1(0) & \\ & & & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B$

③ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=2$, $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_3(0)\end{pmatrix}=J_B$ or $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(0)\end{pmatrix}=J_B$.

④ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=3$, $J_A=\begin{pmatrix} J_1(0) & \\ & J_4(0)\end{pmatrix}=J_B$ or $J_A=\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_3(0)\end{pmatrix}=J_B$

②

⑤ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=4$，$J_A=J_5(0)=J_B$.

注意:

$n=7$时，上述结论不再成立.

例如: $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=4$，$\mu_A=\mu_B=t^3$.

可能会出现 $J_A=\begin{pmatrix} J_3(0) & & \\ & J_3(0) & \\ & & J_1(0)\end{pmatrix}$，$J_B=\begin{pmatrix} J_3(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(0)\end{pmatrix}$.

$A \not\sim_s B$.

上节课证明: $A\in M_n(\mathbb{C})$，$A=\overset{\text{可对角化}}{S}+N$ → 幂零.

∴证明: $A\sim_s J_A$，设$J_A=B+C$，其中B对角线上元素是J_A对角线上元素，其余元素均为0.

设 $J_A=\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_s}(\lambda_s)\end{pmatrix}$，则 $B=\begin{pmatrix} \lambda_1E_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_sE_{d_s}\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_s}(0)\end{pmatrix}$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_s\in\mathbb{C}$是$A$的特征根.

$d_1,\cdots,d_s\in\mathbb{Z}^+$ 且 $d_1+\cdots+d_s=n$.

先证C是幂零矩阵:

∵ $\left(J_{d_i}(0)\right)^{d_i}=0$，令 $d=\max\{d_1,\cdots,d_s\}$，则 $C^d=\begin{pmatrix} (J_{d_1}(0))^d & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (J_{d_s}(0))^d\end{pmatrix}=0$

⇒C是幂零矩阵

∵$A\sim_s J_A$，∴$\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$，s.t. $A=P^{-1}AP=P^{-1}(B+C)P=\underset{S}{\underset{\parallel}{P^{-1}BP}}+\underset{N}{\underset{\parallel}{P^{-1}CP}}$

3. $\mu_{J_n(\lambda)}=(t-\lambda)^n$. $\chi_{J_n(\lambda)}=(t-\lambda)^n$. 计算$J_n(\lambda)$的k次幂形式，特征多项式，其中$k\in\mathbb{N}$.

$$J_n(\lambda)^k=(\lambda E+J_n(0))^k=\lambda^kE+k\lambda^{k-1}J_n(0)+\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}\lambda^{k-i}J_n(0)^i,\quad k\le n-1.$$

$$\Rightarrow J_n(\lambda)^k=\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & 0 \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \vdots \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k\end{pmatrix},\ k\le n-1,$$

$$k\ge n,\ J_n(\lambda)^k=\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k\end{pmatrix}$$

4. λ是A的特征值，则$\exists\vec{v}\in\mathbb{C}^n$，s.t. $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$.

"⇒"

⇒ $A^2\vec{v}=A(\lambda\vec{v})=\lambda A\vec{v}=\lambda^2\vec{v}$

$\cdots$

⇒ $A^k\vec{v}=\lambda^k\vec{v}$. ⇒ λ^k是A^k的特征值.

$A=((A(\vec{e_i})|\vec{e_i}))\ i=1,2,\cdots,n$

"$\Leftarrow$" λ是A^k的特征值，对$\forall k\in\mathbb{Z}^+$.

取$k=1$， 故 λ是 A的特征值.

5. 解： 更一般的情形， $J_n(\lambda)\sim_s J_n(\lambda)^k$ ，$\lambda\neq 0$

$J_n(\lambda)^k$的特征值为λ^k，故$\chi_A=(t-\lambda^k)^n$.

$$\operatorname{rank}(A-\lambda^k E)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0 & k\lambda^{k-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & 0\end{pmatrix}=n-1$$

$\Rightarrow \dim(V^{\lambda^k})=n-(n-1)=1$

$\Rightarrow$ A只有一个若当块

$\Rightarrow J_A=J_n(\lambda^k)$

6. 设U是d维A-不变子空间，不妨设 $0<d<n$. 设$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d}$是$U$的一组基，并把它扩充成$V$的一组基$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d},\vec{e_{d+1}},\cdots,\vec{e_n}$，则$A$在该基下矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}B_{d\times d} & C_{k\times(n-k)}\\ O_{(n-k)\times k} & D_{(n-k)\times(n-k)}\end{pmatrix}$$

$A^t=\begin{pmatrix}B^t & O^t\\ C^t & D^t\end{pmatrix}$，由$\boxed{A\sim_s A^t}$，故$\exists P\in GL_n(F)$, s.t $A^t=P^{-1}AP$. 设

由③可知

$(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$

在基底$\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$下的矩阵是

$$A^t=\begin{pmatrix}B^t & O^t\\ C^t & D^t\end{pmatrix}$$

$A(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_d},\vec{\varepsilon_{d+1}},\cdots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n})A^t$

$\Rightarrow A(\vec{\varepsilon_{d+1}},\cdots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{\varepsilon_{d+1}},\cdots,\vec{\varepsilon_n})D^t$.

$\Rightarrow \langle\vec{\varepsilon_{d+1}},\cdots,\vec{\varepsilon_n}\rangle$是$(n-d)$维$A$-不变子空间.

矩阵相似判定方法.

① A,B初等因子相同

② $\mu_A=\mu_B$. ($\chi_A=\chi_B$),

p_i为μ_A不可约因子.

$\mu_A=p_1^{l_1}\cdots p_n^{l_s}$

$\operatorname{rank}(p_i(A))^l=\operatorname{rank}(p_i(B))^l$

$i=1,2,\cdots,n$.

$l=1,2,\cdots,s$.

③ $\forall f\in F[t]$, $\operatorname{rank}(f(A))=\operatorname{rank}(f(B))$

设A是域F上n维线性空间上线性算子. 证明：如果A有d维不变子空间，则它有$(n-d)$维不变子空间

令 $A\in M_n(\mathbb{C})$. $\chi_A=(t-\lambda_1)^{d_1}\cdots(t-\lambda_k)^{d_k}$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 两两不同.

记 $R(\lambda_i,l)=\mathrm{rank}(\lambda_i E-A)^l$.

$\boxed{\text{阶数为 } l \text{ 的若当块的个数}}$

则 $N(\lambda_i,l)=R(\lambda_i,l-1)+R(\lambda_i,l+1)-2R(\lambda_i,l)$.

例 $A=\begin{pmatrix}2&6&-5\\1&1&-5\\1&2&6\end{pmatrix}$. 求 J_A?

解: $\chi_A(t)=|tE-A|=(\lambda+1)^3$. $\Rightarrow$ χ_A 只有一个特征值 $\lambda=-1$.

$B:=A+E=\begin{pmatrix}3&6&-15\\1&2&-5\\1&2&-5\end{pmatrix}$ $\quad\mathrm{rank}(A+E)=1.\quad \mathrm{rank}((A+E)^2)=0$

$N(\lambda,1)=\mathrm{rank}(B^0)+\mathrm{rank}(B^2)-2\mathrm{rank}(B)=3-2=1.$

$N(\lambda,2)=\mathrm{rank}(B)+\mathrm{rank}(B^3)-2\mathrm{rank}(B^2)=1-0-2\times 0=1$

$N(\lambda,3)=0.$

$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}-1&1&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}.$

欧氏空间.

Def 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间, $f(\vec{x},\vec{y})$ 是 V 上对称双线性型且 $f(\vec{x},\vec{x})$ 是正定二次型. 则称 (V,f) 是一个欧氏空间, f 称为 V 上的内积.

Def $\quad |\vec{x}|:=\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$,

夹角 $\theta:=\arccos\dfrac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}$ $\rightarrow$ $\begin{cases}\theta=0, \text{ 称 } \vec{x},\vec{y} \text{ 同向}\\ \theta=\pi, \text{ 称 } \vec{x},\vec{y} \text{ 反向}\\ \theta=\frac{\pi}{2} \text{ 称 } \vec{x},\vec{y} \text{ 正交}\end{cases}$

prop. 设 V 为欧氏空间, 对 $\vec{x},\vec{y}\in V$, 则

(i) (Cauchy 不等式) $|(\vec{x},\vec{y})|\le\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ "=" 成立 $\Leftrightarrow$ $\vec{x},\vec{y}$ 线性相关.

(ii) 三角不等式 $\|\vec{x}+\vec{y}\|\le\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$, "=" 成立 $\Leftrightarrow$ $\vec{x},\vec{y}$ 同向.

Def. (单位正交基) 设 V 是 n 维欧氏空间, $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组基

(i) $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 均为单位向量

(ii) $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 两两正交

例 设 V 是欧氏空间，$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是单位正交基．$A\in\mathcal{L}(V)$．设 A 是 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 下矩阵，则

$$A=\left((\mathcal{A}(\vec{e_j})|\vec{e_i})\right)_{\substack{i=1,2,\cdots,n\\ j=1,2,\cdots,n}}$$

Pf：设 $\mathcal{A}(\vec{e_j})=\sum_{t=1}^{n}a_{tj}\vec{e_t}$，$a_{ij}\in F$

$$(\mathcal{A}(\vec{e_j})|\vec{e_i})=\left(\sum_{t=1}^{n}a_{tj}\vec{e_t}|\vec{e_i}\right)=\sum_{t=1}^{n}a_{tj}(\vec{e_t}|\vec{e_i})=a_{ij}(\vec{e_i}|\vec{e_i})=a_{ij}$$

$$\Rightarrow A=\left((\mathcal{A}(\vec{e_j})|\vec{e_i})\right).$$

例 $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{v_2}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-3\\1\end{pmatrix}$．

计算 $\|\vec{v_1}\|$，$\|\vec{v_2}\|$ 和这两个向量的夹角

解：$\|\vec{v_1}\|=\sqrt{1^2+3^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{15}$，$\|\vec{v_2}\|=\sqrt{(-4)^2+2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{30}$

两向量之间的夹角

$$\arccos\left(\frac{(\vec{v_1}|\vec{v_2})}{\|\vec{v_1}\|\|\vec{v_2}\|}\right)=\arccos\left(\frac{-5}{15\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

(Gram-Schmidt 正交化) Thm．设 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\in V$ 线性无关．则存在两两正交的单位向量 $\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_k}$ s.t.

$$\langle\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i}\rangle=\langle\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_i}\rangle,\ i=1,2,\cdots,k.$$

步骤：$\vec{\varepsilon_1}=\frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}$

$\vec{\varepsilon_2}'=\vec{v_2}-(\vec{v_2}|\vec{\varepsilon_1})\vec{\varepsilon_1}$

$\vec{\varepsilon_2}=\frac{\vec{\varepsilon_2}'}{\|\vec{\varepsilon_2}'\|}$

$\cdots\cdots$

$\vec{\varepsilon_i}'=\vec{v_i}-\sum_{j=1}^{i-1}(\vec{v_i}|\vec{\varepsilon_j})\vec{\varepsilon_j}$

$\vec{\varepsilon_i}=\frac{\vec{\varepsilon_i}'}{\|\vec{\varepsilon_i}'\|}$

$\vdots$

例 设 $\mathbb{R}[x]^{(2)}$ 上的内积由 $(f|g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$ 给出．

求 $\mathbb{R}[x]^{(2)}$ 上的一组标准正交基．

解：从 $1,x$ 出发．

$\vec{\varepsilon_1}=\frac{1}{\|1\|}=\frac{1}{\sqrt{b-a}}$

$$\vec{\varepsilon_2}'=x-(x|\varepsilon_1)\varepsilon_1=x-\frac{\int_a^b\frac{x}{\sqrt{b-a}}dx}{\sqrt{b-a}}$$

$$=x-\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=x-\frac{a+b}{2}.$$

$$\varepsilon_2=\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\sqrt{\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx}}=\cdots=\frac{2\sqrt{3}x-\sqrt{3}a-\sqrt{3}b}{(b-a)\sqrt{b-a}}.$$

$\Rightarrow\mathbb{R}[x]^{(2)}$ 一组单位正交基是 $\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2}$.

回顾：两两正交的向量组线性无关．

证明：在 n 维欧氏空间中，两两夹角成钝角的元素不多于 $n+1$ 个．

Pf：对 n 作归纳．当 $n=1$ 时，一维欧氏空间任意 3 个元素，必有两元素夹角为 0．

假设命题对 $n-1$ 维欧氏空间成立，下证 n 维欧氏空间也成立．反设，若在 V 中存在 $n+2$ 个元素 $\vec{v_1},\vec{v_2},\cdots,\vec{v_{n+2}}$，其两两夹角为钝角，即 $(\vec{v_i},\vec{v_j})<0$（$i,j=1,2,\cdots,n+2$，$j\neq i$）．令 $W=\langle\vec{v_1}\rangle$．故 $\vec{v_i}\neq\vec{0}$

$$V=W\oplus W^{\perp}$$

$\dim(W^{\perp})=n-1$．此时，

$$\vec{v_i}=a_i\vec{v_1}+\vec{w_i}\quad(\vec{w_i}\in W^{\perp},\ i=2,3,\cdots,n+2.)$$

由 $(\vec{v_i}|\vec{v_1}) = (\alpha_i\vec{v_1}+\vec{w_i}|\vec{v_1}) = \alpha_i(\vec{v_1}|\vec{v_1}) + (\vec{w_i}|\vec{v_1}) = \alpha_i(\vec{v_1}|\vec{v_1}) < 0$

$\Rightarrow \alpha_i < 0$ $(i=2,3,\cdots,n+2)$

对 $\forall\, i, j = 2,3,\cdots,n+2$，且 $i\neq j$

$0 > (\vec{v_i}|\vec{v_j}) = (\alpha_i\vec{v_1}+\vec{w_i}|\alpha_j\vec{v_1}+\vec{w_j}) = \alpha_i\alpha_j(\vec{v_1}|\vec{v_1}) + (\vec{w_i}|\vec{w_j})$

$\Rightarrow (\vec{w_i}|\vec{w_j}) = -\alpha_i\alpha_j(\vec{v_1}|\vec{v_1}) < 0$, $(i,j=2,3,\cdots,n+2,\ i\neq j)$

$\Rightarrow$ 在 $n-1$ 维欧氏空间 $W^{\perp}$ 中存在 $n+1$ 个两两夹角为钝角元素 $\rightarrow \Leftarrow$

$\Rightarrow$ 在 n 维欧氏空间中两两夹角成钝角元素不多于 $n+1$ 个.