

第十六周习题课

——初等因子

回顾:

定义 设 $A \in \mathcal{L}(V)$,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k \quad (3)$$

是 V 的 A -不可分子空间的直和分解. 令 $A_i = A|_{W_i}$

和 $\mu_i = \mu_{A_i}$. 重集 $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ 称为 A 关于 $\hat{(3)}$ 的初等因子组.

结论: (1) 初等因子组是唯一的.

(2) 初等因子组可以通过计算若干矩阵的秩得到

(3) 当 $F = \mathbb{C}$ 时, 初等因子组唯一确定 Jordan 标准型.

Jordan 标准型也唯一确定初等因子组.

1. Jordan 标准型与初等因子组的关系

命题 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, 则 A 的 Jordan 标准型为

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & J_{d_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}, d_1, \dots, d_k \in \mathbb{Z} \text{ 都不必两两不同.}$$

当且仅当 A 的初等因子组为 $\{(t-\lambda_1)^{d_1}, (t-\lambda_2)^{d_2}, \dots, (t-\lambda_k)^{d_k}\}$.
(证明不讲)

证明: $\Rightarrow$ 设 A 在 $W_{11}, \dots, W_{1d_1}, W_{21}, \dots, W_{2d_2}, \dots, W_{k1}, \dots, W_{kd_k}$ 下的矩阵为 J_A ,

令 $W_i = \langle W_{i1}, \dots, W_{id_i} \rangle$, $i=1, \dots, k$. 则 W_i 是 A -子空间, 且

$A_i = A|_{W_i}$ 在 $W_{i1}, \dots, W_{id_i}$ 下的矩阵为 $J_{d_i}(\lambda_i)$, 则 $\chi_{A_i} = (t-\lambda_i)^{d_i}$,

$\mu_{A_i} = (t-\lambda_i)^{d_i}$. 因为 $\chi_{A_i} = \mu_{A_i}$, 所以 W_i 是 A_i 循环的.

又因为 μ_{A_i} 是 $\mathbb{C}[t]$ 中不可约多项式的幂次, 所以 W_i 是 A -不可分



子空间 (引理 9.13). 则

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

且 $\mu_{A_i} = (t - \lambda_i)^{d_i}$, 则初等因子组

$$\{(t - \lambda_1)^{d_1}, \dots, (t - \lambda_k)^{d_k}\}.$$

⇐ 因为 A 的初等因子组为 $\{(t - \lambda_1)^{d_1}, \dots, (t - \lambda_k)^{d_k}\}$. 所以存在 $W_1, \dots, W_k$ 为 A -不可分子空间, 使得

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

而且 $\mu_{A_i} = (t - \lambda_i)^{d_i}$, 其中 $A_i = A|_{W_i}$. 根据讲义中的引理 10.1. 对于每个 W_i , 存在 W_i 的一组基 $w_1^{(i)}, \dots, w_{d_i}^{(i)}$, 使得 A_i 在这组基下的矩阵是 $J_{d_i}(\lambda_i)$. 所以 A 在 $w_1^{(1)}, \dots, w_{d_1}^{(1)}, \dots, w_1^{(k)}, \dots, w_{d_k}^{(k)}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

2. 初等因子组与 μ_A, χ_A 的关系: 设 A 的初等因子组是 $\{q_1, \dots, q_k\}$, 则 $\square$

$$\chi_A = q_1 q_2 \cdots q_k, \quad \mu_A = \text{lcm}(q_1, q_2, \dots, q_k)$$

3. 如何求初等因子组 (一般情况):

(1) 求特征多项式 χ_A , 在 $F[t]$ 中分解 χ_A , 得到

$$\chi_A = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}, \quad p_i \text{ 不可约}$$

(2) 对每个 p_i , 设 p_i^{ℓ} 在初等因子组中的重数 $N(i, \ell)$, $\ell = 1, 2, \dots$

用 4 个结论来计算初等因子组: ① 所有初等因子的乘积等于特征多项式

② 所有初等因子的最小公倍数等于极小多项式.

$$\textcircled{3} R(i, \ell-1) - R(i, \ell) = \left(\sum_{j=\ell}^{k_i} N(i, j) \right) \cdot \deg(p_i), \quad R(i, j) = \text{rank}(p_i^j A^j)$$

$$\textcircled{4} (R(i, \ell-1) - R(i, \ell)) - (R(i, \ell) - R(i, \ell+1)) \\ = \deg p_i \cdot N(i, \ell).$$



习题1. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. 计算得 $\chi_A = \chi_B = (t-2)(t-4)^2$

2. 因为 $\mu_A \mid \chi_A$, 且 $t-2, t-4$ 是 μ_A 因子, 验证得

$$(A-2E)(A-4E)=0.$$

所以 $\mu_A = (t-2)(t-4)$.

对于 B , 验证 $(B-2E)(B-4E) \neq 0$, 所以 $\mu_B = \chi_B = (t-2)(t-4)^2$

3. 求 A, B 的初等因子.

方法一: 由极小多项式等于所有初等因子的最小公倍式, 特征多项式等于所有初等因子的乘积, 所以 A 的初等因子组为

$$\{t-2, t-4, t-4\}$$

B 的初等因子组

$$\{t-2, (t-4)^2\}$$

方法二: 计算 $\text{rank}(A-4E)=1$, $\text{rank}(A-4E)^0=3$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=4$.

所以 $N(\lambda_2, 1) = \text{rank}(A-4E)^1 + \text{rank}(A-4E)^0 - 2\text{rank}(A-4E) = 2$.

则 $N(\lambda_2, 1) = 2$, 所以 A 的初等因子组为

$$\{t-2, t-4, t-4\}.$$

B 同理.

方法三: 先算 Jordan 标准型.

4. $J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, J_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

□



2. 设幂零矩阵 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$, 且 $\mu_A = \mu_B$.

(a) 证明: 当 $n=4$ 时, $A \sim_s B$.

(b) 当 $n=5$ 时, $A \sim_s B$ 是否成立? 并说明理由.

证明: (a) 因为 A, B 为幂零矩阵, 所以 A, B 的特征值都为 0. 又因为 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$, 所以 A, B 关于 0 的几何重数相等, 所以 A, B 关于 0 的 Jordan 块个数相等. 又因为 $\mu_A = \mu_B$, 所以 A, B 关于 0 的 Jordan 块的最大阶数相等.

当 $n=4$ 时, ① 当 $A=B=0$ 时, 显然

② 当 Jordan 块都为 1 个时, 显然

③ 当 Jordan 块都为 2 个时, 则 A, B 的 Jordan 标准型只有两种可能,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

又因为 A, B 的 Jordan 块的最大阶数相同, 所以 A, B 的 Jordan 标准型只能是同种情形.

④ 当 Jordan 块都为 3 个时, 则 A, B 的 Jordan 标准型都为

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

则 $A \sim_s B$

当 $n=5$ 时, 同理分类讨论, $A \sim_s B$.



3. 计算 $J_n(\lambda)$ 的极小多项式, 特征多项式和 $J_n(\lambda)^k$, 其中 $k \in \mathbb{N}$.

解: $\chi_{J_n(\lambda)} = \mu_{J_n(\lambda)} = (t - \lambda)^n$

$$\begin{aligned} J_n(\lambda)^k &= (\lambda E_n + J_n(0))^k \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i (\lambda E_n)^{k-i} (J_n(0))^i \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^{k-i} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}^i \end{aligned}$$

所以当 $k \leq n-1$ 时, $J_n(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \cdots & C_k^{k-1} \lambda & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & C_k^1 \lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}$

当 $k \geq n$ 时, $J_n(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \cdots & C_k^{n-1} \lambda^{k-n+1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & C_k^1 \lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}$

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 证明: λ 是 A 的特征值, 则 λ^k 是 A^k 的特征值.

证明: 假设 $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ & \lambda & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$, 则 $(J_\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & * & \cdots & * \\ & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}$

因为 $A \sim J_\lambda$, 所以 $A^k \sim (J_\lambda)^k$, 则 A^k 的特征值为 $\lambda^k, \lambda^k, \dots, \lambda^k$, 则 λ^k 是 A^k 的特征值.

反过来题目找出得有点问题.

假设 $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 则 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ 是 A^k 的所有特征值.

即 $\varepsilon \lambda$ 是 A 的特征值

因为 λ^k 是 A^k 的特征值, 所以存在 i , 使得 $\lambda_i^k = \lambda^k$, 则 $\lambda_i = \varepsilon \lambda$, $\varepsilon^k = 1$.



5. 证明: $J_n(1) \sim_s J_n(1)^k$.

证明: $J_n(1)^k = \begin{pmatrix} 1 & C_k^1 & * & \cdots & * \\ & 1 & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & C_k^1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, 所以 $\text{rank}(J_n(1)^k - E_n) = n-1$
 $\chi_{J_n(1)^k} = (t-1)^k$.

则 $J_n(1)^k$ 关于 1 的 Jordan 块个数为 1, 所以 $J_n(1)^k$ 的 Jordan 标准型为 $J_n(1)$.

6. (选作) 设 A 是域 F 上 n 维线性空间上的线性算子. 证明: 如果 A 有 d 维不变子空间, 则它有 $(n-d)$ 维不变子空间.

证明: 由于 A 有 d 维不变子空间, 则 A 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, $B \in M_d(F)$, $D \in M_{n-d}(F)$, 又因为

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B^t & 0 \\ C^t & D^t \end{pmatrix},$$

则 A 在另一组基 $w_1, \dots, w_d, w_{d+1}, \dots, w_n$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} B^t & 0 \\ C^t & D^t \end{pmatrix}$, 则

$W = \langle w_{d+1}, \dots, w_n \rangle$ 为 $n-d$ 维不变子空间.

□



补充：下周课上要用：

设 V 是欧氏空间， $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是单位正交基，

(1) 设 $\vec{v} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ，则 $(\vec{v} | \vec{e}_i) = v_i, i=1, \dots, n$

(2) 设 $A \in \mathcal{L}(V)$ ，则 A 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵为

$$A = \left((A(\vec{e}_j) | \vec{e}_i) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \\ = \begin{pmatrix} (A(\vec{e}_1) | \vec{e}_1) & \dots & (A(\vec{e}_n) | \vec{e}_1) \\ (A(\vec{e}_1) | \vec{e}_2) & \dots & (A(\vec{e}_n) | \vec{e}_2) \\ \vdots & & \vdots \\ (A(\vec{e}_1) | \vec{e}_n) & \dots & (A(\vec{e}_n) | \vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

证明：(1) 设 $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n$ ，则

$$\begin{aligned} (\vec{v} | \vec{e}_i) &= (v_1 \vec{e}_1 + \dots + v_n \vec{e}_n | \vec{e}_i) \\ &= v_1 (\vec{e}_1 | \vec{e}_i) + v_2 (\vec{e}_2 | \vec{e}_i) + \dots + v_n (\vec{e}_n | \vec{e}_i) \\ &= (\vec{e}_i | \vec{e}_i) \cdot v_i = v_i. \end{aligned}$$

(2) $(A(\vec{e}_1), \dots, A(\vec{e}_n)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \begin{pmatrix} (A(\vec{e}_1) | \vec{e}_1) & \dots & (A(\vec{e}_n) | \vec{e}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A(\vec{e}_1) | \vec{e}_n) & \dots & (A(\vec{e}_n) | \vec{e}_n) \end{pmatrix}$

