1. 解: (a)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-4 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-8) \quad\Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=8$$

$$(2E-A)=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow V^2$ 对应 $x_1+x_2+x_3=0$ 的解空间，其一组基为 $\{\underbrace{(1,0,-1)^t}_{\vec{v_1}},\ \underbrace{(0,1,-1)^t}_{\vec{v_2}}\}$.

$$\vec{\varepsilon_1}=\frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}=\frac{(1,0,-1)^t}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon_2'}=\vec{v_2}-(\vec{v_2}|\vec{\varepsilon_1})\vec{\varepsilon_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon_2}=\frac{\vec{\varepsilon_2'}}{\|\vec{\varepsilon_2'}\|}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

由于 $\mathbb{R}^3=V^2\oplus V^8$ 且 $V^2\perp V^8 \Rightarrow V^8=(V^2)^\perp=\langle\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v_3}}\rangle$

$$\vec{\varepsilon_3}=\frac{\vec{v_3}}{\|\vec{v_3}\|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 8\end{pmatrix}$$

(b) $P^tAP=B \quad\Rightarrow\quad (P^tAP)^n=P^tA^kP=B^k$

$$\Rightarrow A^k=(P^t)^{-1}\begin{pmatrix}2^k & & \\ & 2^k & \\ & & 8^k\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}2^k & & \\ & 2^k & \\ & & 8^k\end{pmatrix}P^t=\begin{pmatrix}\frac{2^{k+1}+8^k}{3} & \frac{8^k-2^k}{3} & \frac{8^k-2^k}{3}\\ \frac{8^k-2^k}{3} & \frac{8^k+2^{k+1}}{3} & \frac{8^k-2^k}{3}\\ \frac{8^k-2^k}{3} & \frac{8^k-2^k}{3} & \frac{8^k+2^{k+1}}{3}\end{pmatrix}$$

2. (a) 对 $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$, $(A\vec{x}|A\vec{y})=(\vec{x}-2(\vec{x}|\vec{\eta})\vec{\eta}\,|\,\vec{y}-2(\vec{y}|\vec{\eta})\vec{\eta})$

$$=(\vec{x}|\vec{y})-2(\vec{y}|\vec{\eta})(\vec{x}|\vec{\eta})-2(\vec{x}|\vec{\eta})(\vec{y}|\vec{\eta})+4(\vec{x}|\vec{\eta})(\vec{y}|\vec{\eta})(\vec{\eta}|\vec{\eta})$$

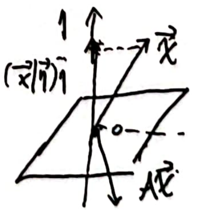
$$=(\vec{x}|\vec{y})$$

(b) 对 $\forall\vec{x}\in V$, $A^2(\vec{x})=A(A\vec{x})=A(\vec{x}-2(\vec{x}|\vec{\eta})\vec{\eta})=A\vec{x}-2(\vec{x}|\vec{\eta})A\vec{\eta}$

$$=\vec{x}-2(\vec{x}|\vec{\eta})\vec{\eta}+2(\vec{x}|\vec{\eta})\vec{\eta}$$

$$=\vec{x}$$

$$A\vec{\eta}=\vec{\eta}-2(\vec{\eta}|\vec{\eta})\vec{\eta}=-\vec{\eta}$$



$$\Rightarrow A^2=\mathcal{E}$$

(c) 取 $\vec{e_1}=\eta$, $\vec{e_2},\cdots,\vec{e_n}$ 为 $\langle\eta\rangle^\perp$ 的一组单位正交基.

$A\vec{e_1}=A\vec{\eta}=-\vec{\eta}$

$A\vec{e_i}=\vec{e_i}-2(\vec{e_i}|\vec{\eta})\vec{\eta}=\vec{e_i}$ $\Rightarrow$ 在基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 下, A 的矩阵为

$$A(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=-1.$$

①

(a) 证明：A 正定 $\Rightarrow \exists T \in O(n)$. s.t $T^t A T = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

正定 $\Rightarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$

$$\underset{T^t}{\underset{\|}{T^{-1}}} A^{-1} \underset{T}{\underset{\|}{(T^t)^{-1}}} = diag(\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1})$$

$\Rightarrow T^t A^{-1} T = diag(\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1})$

$$\Rightarrow T^t(A+A^{-1}-2E_n)T = diag\begin{pmatrix} \lambda_1+\frac{1}{\lambda_1}-2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+\frac{1}{\lambda_n}-2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_i > 0 \Rightarrow \lambda_i + \frac{1}{\lambda_i} - 2 \geq 0$，取等号 $\Leftrightarrow \lambda_i = 1$

$\Rightarrow A+A^{-1}-2E_n$ 半正定，且 A 没有特征值 1，则 $A+A^{-1}-2E_n$ 正定.

(b). A 正定，B 半正定且非零.

由此可知 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, s.t $P^tAP = E_n$, $P^tBP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，$\lambda_i \geq 0$，且 λ_i 不全为 0

$$det(P^tAP + P^tBP) = det\left(\begin{pmatrix} 1+\lambda_1 & & & \\ & 1+\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1+\lambda_n \end{pmatrix}\right) = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i).$$

由 $\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) > 1$ 且 $\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) > \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ 可得. $det(P^t(A+B)P) > det(P^tAP)$ 且 $det(P^t(A+B)P) > det(P^tBP)$

$det(P^tAP+P^tBP) = det(P)^2 det(A+B)$

$det(P^tAP) = det(P^2)det(A)$, $det(P^tBP) = det(P)^2 det(B)$

由 $det(P) \neq 0 \Rightarrow det(A+B) > max(det(A), det(B))$

(c). $A, B \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$A \sim_o \begin{pmatrix} N(\cos\theta_1, \sin\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N(\cos\theta_s, \sin\theta_s) & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$, $\theta_i \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$

$\lambda_{2s+1}, \cdots, \lambda_n \in \{-1, 1\}$.

$$B \sim_o \begin{pmatrix} N(\cos\theta_1', \sin\theta_1') & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N(\cos\theta_s', \sin\theta_s') & & \\ & & & \mu_{2s+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mu_n \end{pmatrix}$$, $\theta_i' \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$

$\mu_{2s+1}, \cdots, \mu_n \in \{-1, 1\}$.

$\det(A)+\det(B)=0$，结果 $|\det(A)|=1=|\det(B)|$

$\Rightarrow$ $\det(A)$ 与 $\det(B)$ 一个为1一个为-1.

不妨设 $\det(A)=1$，$\det(B)=-1$.

$$\det(A+B)=\det((A+B)A^t)=\det(E_n+BA^t)=\det(BB^t+BA^t)=\det(B)\det((B+A)^t)$$
$$=\det(B)\det(A+B)=-\det(A+B)$$

$\Rightarrow$ $\det(A+B)=0$ $\quad(\because 2\neq 0)$.

4. (a) 回忆 $A\in M_n(\mathbb{R})$. $\operatorname{rank}(A^tA)=\operatorname{rank}(A)=r$ 且 A^tA 为半正定.

$\Rightarrow \exists P\in O_n(\mathbb{R})$, s.t. $P^{-1}(A^tA)P=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_r & & \\ & & & & \lambda_{r+1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_r>0$，$i=1,2,\dots,r$

$\lambda_i=0$，$i=r+1,\dots,n$.

$\vec{v_1},\dots,\vec{v_n}$ 即 P 的所有列向量.

(b) $\langle \vec{u_i}^t | \vec{u_i}^t\rangle=\vec{u_i}^t\vec{u_i}=\dfrac{\vec{v_i}^tA^tA\vec{v_i}}{\sigma_i^2}=\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i}=1$

$\langle \vec{u_i}^t | \vec{u_j}^t\rangle=\vec{u_i}^t\vec{u_j}=\dfrac{\vec{v_i}^tA^tA\vec{v_j}}{\sigma_i^2}=\dfrac{\vec{v_i}^t\lambda_j\vec{v_j}}{\lambda_i}=\dfrac{0}{\lambda_i}=0 \quad i\neq j$

$\Rightarrow (\vec{u_1})^t,\dots,(\vec{u_n})^t$ 两两正交且长度为1.

(c) $A^tA\vec{v_i}=0$，$i=r+1,\dots,n$，则 $\vec{v_i}^tA^tA\vec{v_i}=0$

$\Rightarrow (A\vec{v_i})^tA\vec{v_i}=0$

$\Rightarrow A\vec{v_i}=0$，$i=r+1,\dots,n$.

(d) 把 $\vec{u_1},\dots,\vec{u_r}^t$ 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组单位正交基 $\vec{u_1},\dots,\vec{u_r},\vec{u_{r+1}},\dots,\vec{u_n}$.

令 $U=(\vec{u_1},\dots,\vec{u_n})$，$V=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$，则 $U,V\in O_n(\mathbb{R})$

$$U\begin{pmatrix}\sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}=A\underbrace{(\vec{v_1},\dots,\vec{v_r},\vec{v_{r+1}},\dots,\vec{v_n})}_{=V}$$

$$\Rightarrow A=U\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}V^t \qquad (V^{-1}=V^t)$$

期末复习

利用 χ_A 和 μ_A 及几何重数 求：J_A

1. $A\in M_n(\mathbb{C})$，其特征多项式和极小多项式分别记为 χ_A 和 μ_A.

(i) $\chi_A(t)=(t-1)^2(t-2)$，$\mu_A(t)=(t-1)(t-2)$

解：由特征多项式的次数可知，$n=3$. 由极小多项式无重根可知，A 可对角化.

$$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$$

(ii) $\chi_A(t)=(t+1)^5$，$\mu_A(t)=(t+1)^3$；特征根 $\lambda=-1$ 的几何重数为2.

由特征多项式的次数可知，$n=5$. 由极小多项式可知，J_A 中阶最大的 Jordan 块是 $J_3(-1)$.

由几何重数可知 J_A 中共有2个 Jordan 块.

$$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}J_3(-1)&\\&J_2(-1)\end{pmatrix}$$

(iii) $\chi_A(t)=(t-2)^4(t+2)^3$，$\mu_A(t)=(t-2)^2(t+2)^2$，特征根 $\lambda=2$ 的几何重数为3

由特征多项式的次数可知，$n=7$. 由极小多项式可知，J_A 中阶最大的 Jordan 块是 $J_2(2)$，$J_2(-2)$

由几何重数的条件可知，关于特征值为2的 Jordan 块共3块.

$$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}J_2(2)&&&&\\&J_1(2)&&&\\&&J_1(2)&&\\&&&J_2(-2)&\\&&&&J_1(-2)\end{pmatrix}$$

计算正交补空间的一组单位正交基.

2. 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧氏空间，U 是以

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&0&-1\\2&1&-1&-1\end{pmatrix}$$

为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间，记 $U^\perp$ 为 U 的正交补. 计算

(i) $\dim(U)$ 和 $\dim(U^\perp)$

(ii) $U^\perp$ 的一组单位正交基

解(i)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&0&-1\\2&1&-1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&-1\\2&1&-1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A)=2$ $\Rightarrow \dim(U)=2$，$\dim(U)+\dim(U^\perp)=4$，$\Rightarrow \dim(U^\perp)=2$.

(ii) $\dim(U^{\perp})=2$，由 $\vec{A_1}$，$\vec{A_2}$ 线性无关

$$\Rightarrow U^{\perp}=\langle \vec{A_1}^t, \vec{A_2}^t \rangle.$$

由 Gram-Schmidt 正交化.

$$\vec{v_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{v_2}'=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\vec{v_2}=\frac{2}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $U^{\perp}$ 的一组单位正交基是 $\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$.

分类讨论. J_A.

设 $A=\begin{pmatrix}a&a&0\\0&a&1\\0&0&b\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$. 计算 A 的 Jordan 标准型.

解: $\chi_A=(t-a)^2(t-b)$.　　$A-aE=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&1\\0&0&b-a\end{pmatrix}$

情形① $a\neq b$ 且 $a\neq 0$.

$$\operatorname{rank}(A-aE)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&1\\0&0&b-a\end{pmatrix}=2$$

$$\Rightarrow \dim V^a=1.\quad \Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}a&1&\\&a&\\&&b\end{pmatrix}$$

② $a\neq b$ 且 $a=0$，$\operatorname{rank}(A-aE)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&b\end{pmatrix}=1$

$$\Rightarrow \dim V^a=2 \quad\Rightarrow\quad J_A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&b\end{pmatrix}$$

③ $a=b$ 且 $a\neq 0$，$\operatorname{rank}(A-aE)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=2$

$$\Rightarrow \dim V^a=1 \quad\Rightarrow\quad J_A=\begin{pmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}$$

④ $a=b=0$，

$$\operatorname{rank}(A-aE)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=1$$

$$\Rightarrow \dim V^a=2$$

$$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

⑤

利用 Halmiton-cayley 定理求 A^n.

设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^m$, $m \in N_+$

$\chi_A=\begin{vmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{vmatrix}=t^2-1$, $\chi_B=\begin{vmatrix} t & 2 \\ -1 & t \end{vmatrix}=t^2+2$

设 $P=\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$

求 M_P.

由 Halmiton-cayley 定理可知, $A^2=E_2$, $B^2=-2E_2$

当 m 为偶数时, $A^m=A\cdot A^{m-1}=A^2A^{m-2}=A^{m-2}=\cdots=E_2$

$B^m=(-2)^{\frac{m}{2}}E_2$

$M_P=\operatorname{lcm}(M_A, M_B)$

$=(t^2-1)(t^2+2)$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & (-2)^{\frac{m}{2}} & \\ & & & (-2)^{\frac{m}{2}} \end{pmatrix}$$

当 m 为奇数, $A^m=A$, $B^m=(-2)^{\frac{m-1}{2}}\cdot B$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix} A & \\ & (-2)^{\frac{m-1}{2}}B \end{pmatrix}$$

正规矩阵等价标准型.
$A\in M_n(\mathbb{R})$

① 对称矩阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$, $A\sim_o\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$.

特征值为实数.

② 斜对称矩阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$, $A\sim_o\begin{pmatrix} N(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, $\beta_1,\cdots,\beta_s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

特征值是 0 或者纯虚数 ai, $a\in\mathbb{R}$

③ 正交矩阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$, $A\sim_o\begin{pmatrix} N(\cos\theta_1,\sin\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N(\cos\theta_s,\sin\theta_s) & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\theta_i\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, $\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n\in\{-1,1\}$.

特征值: 复数模长为 1.