第18周习题课

——期末复习

50% 计算. 50% 证明.

一. 计算部分

1. 极小多项式的计算：给一个矩阵（不是对角矩阵），计算它的极小多项式.

① $\deg(\mu_A)=1$ 当且仅当 A 是数乘矩阵.

② 计算 $E_n, A^1, A^2, \cdots,$ 直到第一次出现它们线性相关.

③ 若 $A=\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$，则 $\mu_A = \mathrm{lcm}(\mu_B, \mu_C)$.

④ Hamilton-Cayley 定理. $\mu_A \mid \chi_A$ 且 χ_A 的不可约因子都是 μ_A 的因子.

例子：设 $J_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$J_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_2 \end{pmatrix}$，计算 μ_A.

解：$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$J_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$(J_1)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以 $E_2, J_1, (J_1)^2$ 线性相关，

因为 $0\cdot E_2+0\cdot J_1+1\cdot(J_1)^2=O_{2\times 2}$，所以 $\mu_{J_1}=t^2$.

$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$J_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$(J_2)^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $E_2, J_2, (J_2)^2$ 线性相关.

因为 $0\cdot E_2+(-2)\cdot J_2+(J_2)^2=O_{2\times 2}$，所以 $\mu_{J_2}=-2t+t^2=t(t-2)$

则 $\mu_A=\mathrm{lcm}(\mu_{J_1}, \mu_{J_2})=t^2(t-2)$. □

2. 计算特征多项式. 特征向量. 正交对角化（Schmidt 正交化）

例子. 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，计算正交矩阵 P 和对角矩阵 D，使得 $P^tAP=D$.

解．计算得 $\chi_A=(t-2)^2(t-8)$．则 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=8$．

对于 $\lambda_1=2$，计算 $2E_3-A=0$ 的解空间，得

$$V^{\lambda_1}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle\text{，设 } u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

（例1.19）

通过 Schmidt 正交化，$\varepsilon_1=\frac{1}{\|u_1\|}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt2}u_1$

$$\varepsilon_2'=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\middle|\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac12\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac12\\1\\-\frac12\end{pmatrix}.$$

$\varepsilon_2=\frac{1}{\|\varepsilon_2'\|}\varepsilon_2'=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$．所以 $V^{\lambda_1}=\left\langle\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$．

对于 $\lambda_1=8$，计算 $8E_3-A=0$ 的解空间，得

$$V^{\lambda_2}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle,\quad\text{设 } u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

所以 $\varepsilon_3=\frac{1}{\|u_3\|}\vec{u}_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以 $V^{\lambda_2}=\left\langle\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\right\rangle$．

综上，$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，$P^tAP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&8\end{pmatrix}$．

3．计算 A^k．

① 方法一：利用极小多项式．

例子. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix}$, 计算 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^n$, $n\in\mathbb{N}^+$.

解. 计算得 $\mu_A=t^2-1$, $\mu_B=t^2+2$.

所以 $A^2-E_2=0_{2\times2}$, 即 $A^2=E_2$. $B^2+2E_2=0_{2\times2}$, 即 $B^2=-2E_2$. 所以

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}A^n&0\\0&B^n\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}E_2&\\&(-2)^{\frac{m}{2}}E_2\end{pmatrix}, & m\text{为偶数}\\ \begin{pmatrix}A&\\&(-2)^{\frac{m-1}{2}}B\end{pmatrix}, & m\text{为奇数}\end{cases}$$

② 方法二. 利用正交对角化.

4. 计算 Jordan 标准型 (注解10.8)

① 给低阶矩阵, 计算 Jordan 标准型.

例子. 设 $A=\begin{pmatrix}a&a&0\\0&a&1\\0&0&b\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$, 计算 A 的 Jordan 标准型

解. 计算得 $\chi_A=(t-a)^2(t-b)$. 记 $n=3$.

(1) 当 $a\neq b$ 时, 计算 $n-\mathrm{rank}(A-aE_3)=\begin{cases}1 & a\neq0\\ 2 & a=0\end{cases}$

所以当 $a\neq b$ 且 $a\neq0$ 时, a 的几何重数为 1, 则

$$J_A=\begin{pmatrix}J_2(a)&\\&J_1(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&1&\\&a&\\&&b\end{pmatrix}$$

当 $a\neq b$, 且 $a=0$ 时, a 的几何重数为 2, 则

$$J_A=\begin{pmatrix}J_1(a)&&\\&J_1(a)&\\&&J_1(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&&\\&a&\\&&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&b\end{pmatrix}$$

(2) 当 $a=b$ 时，$n-\operatorname{rank}(A-aE_3)=\begin{cases} 2 & a=0 \\ 1 & a\neq 0 \end{cases}$

所以当 $a=b$ 且 $a\neq 0$ 时，$J_A=\begin{pmatrix} J_3(a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix}$.

当 $a=b$ 且 $a=0$ 时，$J_A=\begin{pmatrix} J_2(a) & \\ & J_1(a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

② 给条件猜 Jordan 标准型 (注解10.8)

例子 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. $\chi_A(t)=(t-1)^2(t-2)$, $\mu_A(t)=(t-1)(t-2)$. 求 J_A.

解. 由极小多项式可知，J_A 中关于 1 的 Jordan 块和关于 2 的 Jordan 块最大阶数都为 1. 所以

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_1(1) & \\ & & J_1(2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

例子. 设 $\chi_A(t)=(t-2)^4(t+2)^3$, $\mu_A(t)=(t-2)^2(t+2)^2$. 特征值 $\lambda=2$ 的几何重数为 3. ($\operatorname{rank}(A-2E)=4$)，求 J_A.

解. 由 χ_A 可知 $A\in M_7(\mathbb{C})$. 由 μ_A 可知 J_A 中关于 2 和 -2 的 Jordan 块最大阶数都是 2. 由 $\lambda=2$ 的几何重数为 3 可知，关于 2 的 Jordan 块有 3 块. 则

$$J_A=\begin{pmatrix} J_2(2) & & & & \\ & J_1(2) & & & \\ & & J_1(2) & & \\ & & & J_2(-2) & \\ & & & & J_1(-2) \end{pmatrix}_{7\times 7}$$

5. 求正交补和单位正交基.

例子. 设R^4是标准欧氏空间, U是以

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&0&-1\\2&1&-1&-1\end{pmatrix}$$

为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间, 记$U^\perp$为U的正交补.

计算 (a) $dim(U)$ 和 $dim(U^\perp)$

(b) 计算$U^\perp$和U的单位正交基.

解 (a) 由U的定义方程可知.

$$U^\perp=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

计算得 $dim(U^\perp)=2$. 所以 $dim(U)=4-dim(U^\perp)=2$.

(b) 计算得 $U^\perp=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$,

由 Schmidt 正交化

$$\vec{\varepsilon_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\varepsilon_2}=\frac{2}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}.$$

则 $U^\perp$的一组单位正交基是$\vec{\varepsilon_1}$, $\vec{\varepsilon_2}$.

U的单位正交基自己算!

二. 证明部分.

习题3. (同时对角化).

(b). 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A 正定, B 半正定且非零. 证明:

$$\det(A+B) > \max(\det(A), \det(B))$$

证明: 因为 A 正定, 则存在 $P \in GL_n(\mathbb{R})$, 使得

$$P^t A P = E_n, \quad P^t B P = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

于是

$$P^t(A+B)P = \mathrm{diag}(1+\alpha_1, \cdots, 1+\alpha_n).$$

取行列式得 $(\det P)^2 \det(A+B) = (1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n)$.

而由 $P^t A P = E_n$ 和 $P^t B P = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 得

$$(\det(P))^2 \det(A) = 1$$

$$(\det(P))^2 \det(B) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$$

而 $1 < (1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n)$, $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n < (1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n)$. 所以

$$\det(A+B) > \max\{\det(A), \det(B)\}.$$

$\square$

回顾: G 是正定的 $\Leftrightarrow$ G 合同于一个对角线都是正的的对角矩阵

则 $P^t G P = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$, $d_i > 0$. $i = 1, \cdots, n$.

证明部分其它.

(a) 证明正定、半正定。

设 $A\in M_n(R)$ 为正定矩阵，证明 $A+A^{-1}-2E_n$ 为半正定矩阵。

证明：因为 A 为实对称矩阵，所以存在 $P\in O_n(\mathbb{R})$，

使得 $P^tAP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i>0$，则

$$(P^tAP)^{-1}=diag(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n})$$

即 $$P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^t=diag(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n})$$

$$\Rightarrow\quad P^tA^{-1}P=diag(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n})。$$

所以 $P^t(A+A^{-1}-2E_n)P$

$$=P^tAP+P^tA^{-1}P-2E_n=diag(\lambda_1+\frac{1}{\lambda_1}-2,\cdots,\lambda_n+\frac{1}{\lambda_n}-2)。$$

因为 $\lambda_i+\frac{1}{\lambda_i}-2\geqslant 0$，所以 $A+A^{-1}-2E_n$ 半正定。

(c) 设 $A,B\in O_n(\mathbb{R})$，$det(A)+det(B)=0$。证明：$A+B$ 不可逆

证明：因为 $A,B\in O_n(\mathbb{R})$，$det(A)+det(B)=0$，所以不妨设

$det(A)=1$，$det(B)=-1$，则

$$\begin{aligned}det(A+B)&=det A\, det B\, det(A^{-1}+B^{-1})\\&\cancel{=det A\, det B\, det}\\&=-det(A^t+B^t)\\&=-det((A+B)^t)=-det(A+B)。\end{aligned}$$

所以 $2det(A+B)=0$，得 $det(A+B)=0$。