第一周习题课

——根与系数的关系，对称多项式

一. 域上的一元多项式

定理1（带余除法）设 $f,g\in F[x]$ 且 $g\neq 0$，则存在唯一的多项式 $q,r\in F[x]$，满足

$$f=qg+r \quad 和 \quad deg(r)<deg(g)$$

（注：$deg(0)\triangleq -\infty$）

命题2　设 $f\in F[x]$，则 $\alpha\in F$ 是 f 的根（即 $f(\alpha)=0$）当且仅当

$$f=q(x)(x-\alpha),\ q(x)\in F[x].$$

证明.（必要性.）根据多项式的带余除法，存在 $q(x), r(x)\in F[x]$，使得

$$f(x)=q(x)(x-\alpha)+r(x) \quad 且 \quad deg(r(x))<1,$$

所以 $r(x)\in F$. 两边代入 α，得

$$f(\alpha)=q(\alpha)(\alpha-\alpha)+r(\alpha),$$

即 $0=0+r(\alpha)$，于是 $r(\alpha)=0$. 而 $r(x)\in F$，所以 $r(x)=0$，则

$$f(x)=q(x)(x-\alpha).$$

（充分性.）显然. □

定理3（代数学基本定理）设 $f\in\mathbb{C}[x]\setminus\mathbb{C}$，则 f 在 $\mathbb{C}$ 中有根.

推论4. 设 $f\in\mathbb{C}[x]\setminus\{0\}$，则 $deg(f)=n$，则 f 恰有 n 个复根（重根按重数计算）.

证明. 根据代数学基本定理，当 $deg(f)>0$ 时，f 在 $\mathbb{C}$ 中有根，设为 α_1，则由命题2可知，$f(x)=q_1(x)(x-\alpha_1)$，而根据多项式乘法的性质可知 $deg(q_1(x))=n-1$. 若 $deg(q_1(x))=n-1>0$，则 q 在 $\mathbb{C}$ 中有根，设为 α_2，由命题2得 $q_1(x)=(x-\alpha_2)q_2(x)$. ~~以此类推~~，$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)q_2(x)$，以此类推，得

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\cdot q_n,\quad q_n\in \mathbb{C}$$

所以 f 恰有 n 个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.（注：$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 有可能有重复） □

~~$f\in\mathbb{C}$~~ $f\in F[x]$ 可约 $\Leftrightarrow \exists f_1,f_2\in F[x]$, s.t. $f=f_1f_2$, $0<\deg f_1<\deg f$（或者说 $\deg f_1<\deg f$ 且 $\deg f_2<\deg f$）

推论5. $\mathbb{C}[x]$ 上不可约多项式次数至多1次

推论6. $\mathbb{R}[x]$ 上不可约多项式次数至多为2次.

二. 域上一元多项式根与系数的关系（推广韦达定理）

韦达定理：设 $f(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{C}[x]$, $a\neq 0$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$ 是 $f(x)$ 的两根，则有 $\alpha_1+\alpha_2=-\frac{b}{a}$, $\alpha_1\alpha_2=\frac{c}{a}$.

问题：当 $f(x)$ 的次数大于2时，是否有类似的"韦达定理"，比如 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\in\mathbb{C}[x]$, $a_3\neq 0$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{C}$ 是 $f(x)$ 的三个根，问 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 a_0,a_1,a_2,a_3 有什么关系？

回忆韦达定理证明：设 $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$，则由 α_1,α_2 是 $f(x)$ 的两根，所以

$$f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2),$$

即 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$，代简可得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+(-\alpha_1-\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2,$$

所以比较系数可知 $-\frac{b}{a}=\alpha_1+\alpha_2$, $\frac{c}{a}=\alpha_1\alpha_2$.

□

一般地，对于次数为 n 的多项式，我们可以得到如下根与系数的关系：

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \in \mathbb{C}[x]$, $a_n\neq 0$, 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ 为 $f(x)$ 的 n 个根，则

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=(-1)^1\cdot\sum_{1\le i_1\le n}\alpha_{i_1},$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n}=(-1)^2\cdot(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n)=(-1)^2\cdot\sum_{1\le i_1<i_2\le n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_0}{a_n}=(-1)^n\cdot(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)=(-1)^n\cdot\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_n}$$

即 $\frac{a_{n-k}}{a_n}=(-1)^k\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}$, $\cancel{k=0,\cdots,n-1}$. $k=1,2,\cdots,n$

三 对称多项式的基本定理

定义 7（对称多项式）设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in F[x_1,\cdots,x_n]$, 对任意 $\sigma\in S_n$, 定义映射 ψ_σ : $F[x_1,\cdots,x_n]\longrightarrow F[x_1,\cdots,x_n]$

$$f(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)}).$$

若对任意 $\sigma\in S_n$, 有 $\psi_\sigma(f)=f$, 则称 f 为对称多项式.

例 8.（初等对称多项式）当 $n=3$ 时

$$\sigma_1=x_1+x_2+x_3$$
$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$
$$\sigma_3=x_1x_2x_3$$

称为（3元）初等对称多项式. 对于一般的 n, 有（n元）初等对称多项式为

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{1\le i_1\le n}x_{i_1}$$
$$\vdots$$
$$\sigma_k=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}.$$
$$\vdots$$
$$\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n$$

定理9　设 $f(x_1,\cdots,x_n)\in F[x_1,\cdots,x_n]$ 为对称多项式，则 f 可以表为初等对称多项式的多项式，即存在 $h(x_1,\cdots,x_n)\in F[x_1,\cdots,x_n]$，使得 $h(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)=f(x_1,\cdots,x_n)$．进一步地，$h(x_1,\cdots,x_n)$ 是唯一的．

例10　设 $f=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]$，则 f 为对称多项式，且

$$
\begin{aligned}
f&=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2(x_1x_2x_3)(x_1+x_2+x_3)\\
&=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3 .
\end{aligned}
$$

则存在 $h=x_2^2-2x_1x_3$，使得

$$\cancel{h(\sigma_2,\sigma_3)}=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3=f$$

$$h(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$$

定理9的证明略．可参见高等代数—张禾瑞 2007 第五版．P94–P95

基本想法：消首项．

$a,b\in F$

字典序：设 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 和 $bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ 是 $F[x_1,\cdots,x_n]$ 中两个单项式，则

$$ax_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}>bx_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$$ 当且仅当 存在 k，使得 $i_1=j_1,\cdots,i_{k-1}=j_{k-1}$ 且 $i_k>j_k$

比如在 $F[x_1,x_2,x_3]$ 中，$x_1x_2>x_1x_3>x_2x_3$，$x_1^3>x_2x_3^4$

$$\cancel{1<x_3<x_3^2<\cdots<x_2}$$

首项：把一个多元多项式的项从大到小按某一个序排列（比如字典序），则排在首位的项称为首项．比如

$$
\begin{aligned}
f&=7x_1x_3+3x_1^2+7x_2x_3\\
&=3x_1^2+7x_1x_3+7x_2x_3\ \in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]
\end{aligned}
$$

则 $3x_1^2$ 为 f 的首项．

例11　用(3元)初~~笔~~等对称多项式表示 $Q[x_1, x_2, x_3]$ 中的对称多项式

$$f = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$$

解.　$f - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2$

$= -2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^2x_3 - 2x_1x_2x_3^2$

$$(-2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^2x_3 - 2x_1x_2x_3^2) + 2(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2x_3) = 0$$

即 $\cancel{f}$ $f - \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 = 0$, 所以

$$f = \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3 .$$

□

推论12　设 $g \in Q[x]$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 g 的所有复根, 设 $f \in Q[x_1, \cdots, x_n]$ 为对称多项式, 则 $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in Q$.

证明.　自行思考.