1.设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是实数，且多项式 $p(x)=ax^2+bx+c$ 满足

$$p(\alpha_i)=\beta_i, \quad i=1,2$$

列出 $p(x)$ 的系数 $\boxed{a, b, c}$ 满足的线性方程组 以及该方程组对应的系数矩阵和增广矩阵。

解：$p(\alpha_i)=\beta_i, i=1,2$，对应的线性方程组为

注意到 a, b, c 是未知数。

$$\begin{cases} a\alpha_1^2+b\alpha_1+c=\beta_1 \\ a\alpha_2^2+b\alpha_2+c=\beta_2 \end{cases}$$

系数矩阵为 $\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 \end{pmatrix}$

增广矩阵为 $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 & \beta_1 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 & \beta_2 \end{array}\right)$

2. L, n 元线性方程组，增广矩阵为 $B=(A|\vec{b})$

命题：A 是 $m\times n$ 实矩阵，经过有限次第I类和第III类初等行变换，可以把 A 化成一个阶梯型。

初等行变换
- 第 i 行和第 j 行互换 (I). $i \leftrightarrow j$
- A 的第 i 行乘以后加到第 j 行 (II) $r_j+\alpha r_i$
- 第 i 行乘 α，$\alpha\in R$ (III)

通过初等行变换，可以把 B 化为阶梯形 D

$$D=(C|\vec{d})=\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & \cdots & * & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \bullet & * & \cdots & * & d_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \bullet & * & d_k \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_{k+1} \\ \vdots & & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_m \end{array}\right)$$

$\bullet$ 是非零元素

命题

L 相容 $\iff d_{k+1}=\cdots=d_m=0$

L确定 $\Leftrightarrow d_{r+1}=\cdots=d_n=0$ 且 $r=n$.

(1) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y+2z=6 \\ x+y+3z=2. \end{cases}$ ，(1) 对应的增广矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} := B.$$

$\Rightarrow$ (1)是相容的

B对应的非零方程的个数 $\overset{=3.}{=}$ 未知数的个数.

$\Rightarrow$ (1) 是确定的.

线性方程组 (2) 对应的增广矩阵为 $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$.

将其化为阶梯型.

(2) $\begin{cases} y+z=4 \\ 2x+y+3z=1 \\ x+y+2z=2. \end{cases}$

$$A \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ (2)是不相容的.

数学归纳法

用法：去证明许多涉及自然数的命题

原理基础：任何自然数的非空集合都有最小元素 (peano公理)

第一数学归纳法

对 $\forall n\in\mathbb{N}$，存在某个命题 $P(n)$，若 $P(n)$ 满足如下两个条件

① $P(1)$ 成立 → 初始情形

② 对给定 $\forall m\in\mathbb{N}$，由 $P(m)$ 成立总能推出 $P(m+1)$ 成立。→ 递推。

第二数学归纳法（完全数学归纳法）

$\forall n\in\mathbb{N}$，存在某个命题 $P(n)$，若 $P(n)$ 满足如下两个条件

① $P(1)$ 成立

② 对给定任意 $m\in\mathbb{N}$，由 $P(k)$ 对所有 $k\le m$ 成立可推出 $P(m+1)$ 成立

(第一数学归纳法正确性)

证明：反证法：假设存在 $n\in\mathbb{N}$，使得 $P(n)$ 不成立。

考虑集合 $S:=\{s\in\mathbb{N}\mid P(s)\text{不成立}\}$

$n\in S \Rightarrow S\neq\emptyset$

由peano公理可知，$\exists\, s_0\in S$ 是 S 的最小元

由① $P(1)$ 成立 $\Rightarrow s_0>1 \Rightarrow s_0-1\in\mathbb{N}$

由 s_0 的最小性 $\Rightarrow P(s_0-1)\notin S$，即 $P(s_0-1)$ 成立。

再由条件②可知，$P(s_0)$ 成立. → ⇐

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}$，$P(n)$ 均成立。

3. 证明：$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$，$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\forall n\in\mathbb{N}$.

先验证 $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

注意：归纳对象是n不是k。

解：① (初始情形) $n=1$，等式左边 $=\sum_{k=1}^{1} k=1$

等式右边 $=\frac{1\cdot 2}{2}=1=$ 等式左边.

$\Rightarrow$ 等式对①成立

②(递推) 假设等式对 $n-1$ 成立，即: $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$

下面来看 n 的情况.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} k + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\Rightarrow$ 等式对 n 成立.

综上，即证 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

证明 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

证明: $n=1$ 时，等式左边 $= \sum_{k=1}^{1} 1^2 = 1$，等式右边 $= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$.

$=$ 等式左边

$\Rightarrow$ $n=1$ 时，等式成立.

假设等式对 $n-1$ 成立. 即 $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

下面来看 n 的情况

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{6n^2 + (n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{n\cdot(6n+2n^2-3n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$\Rightarrow$ 等式对 n 成立.

综上，等式对 $\forall n \in N_+$ 均成立.

4. 设下列实系数方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

有两组解:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{cases}$$

证明: 对任何实数 c,

$$\begin{cases} x_1 = c\alpha_1 \\ x_2 = c\alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = c\alpha_n \end{cases} 和 \begin{cases} x_1 = \alpha_1+\beta_1 \\ x_2 = \alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n+\beta_n \end{cases}$$

证明：由于 $\begin{cases} x_1=\alpha_1 \\ x_2=\alpha_2 \\ \vdots \\ x_n=\alpha_n \end{cases}$ 是(1)的解，则 $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\alpha_j = 0}$，$i=1,2,\cdots,m$

$$c\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\alpha_j\right) = 0,\ i=1,2,\cdots,m$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(c\alpha_j) = 0,\ i=1,2,\cdots,m$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = c\alpha_1 \\ x_2 = c\alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = c\alpha_n \end{cases}$ 是(1)的一组解。

而由于 $\begin{cases} x_1=\beta_1 \\ x_2=\beta_2 \\ \vdots \\ x_n=\beta_n \end{cases}$ 是(1)的解，则 $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\beta_j = 0$，$i=1,2,\cdots,m$.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\beta_j = 0,$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j}\alpha_j + a_{i,j}\beta_j) = 0,$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\alpha_j+\beta_j) = 0, \quad i=1,2,\cdots m$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha_1+\beta_1 \\ x_2 = \alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n+\beta_n \end{cases}$ 是方程组的一组解。

二项式定理

1. 排列与组合　　　　2) 八刚性

有n个球，分别标号为1, 2, …, n.

①取出r个($r \le n$)，按一定顺序排列，得到不同的排列方式的个数称为排列数，记为

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

②取出r个($r \le n$)，不计顺序地并成一列，得到不同的组合方式个数称为组合数，记为 $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

规定：$\binom{n}{0} = 1$，$\binom{n}{r} = 0$，对$r<0$或者$r>n$.

性质：① $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.　　从n个球中，取出r个

将n个球（不计顺序）取出r个 $\binom{n}{r}$ 和（不计顺序）丢掉$n-r$个是一样的 $\binom{n}{n-r}$.

② (帕斯卡定理) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

组合意义：从n个球中，取出r个，取法$\binom{n}{r}$

另一种看待方法 {
① 对于标号为1的球，如果取出，则有$\binom{n-1}{r-1}$个
② 对于标号为1的球，如果不取出，则有$\binom{n-1}{r}$个

总取法是：$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

二项式定理　$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$，$\forall n \in \mathbb{N}$

Pf：①组合意义：$(a+b)^n = \underbrace{\boxed{(a+b)}}_{\text{一个括号}}(a+b)\cdots(a+b)$.

将$(a+b)^n$展开，也就意味从n个括号里，每次拿出a或b，对应着式子$a^m b^k$.

m：拿出a的总个数

k: 拿出 b 的总个数

显然: $m+k=n$, $m=0,1,\cdots,n$.

$$\Rightarrow (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{A_i}_{i} a^i b^{n-i}$$

A_i 代表展开后出现 $a^i b^{n-i}$ 的个数, 即从 n 个括号里拿出 i 个 a 的情况

$$\Rightarrow A_i = \binom{n}{i}.$$

② 数学归纳法

(1) $n=1$ 时, 等式左边 $= a+b$, 右边 $= \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1}$

$$= b+a$$

(2) 假设命题对 $n-1$ 成立, 即 $(a+b)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^i b^{n-1-i}$ =左边.

对于 n,
$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b)$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^i b^{n-1-i}\right)(a+b)$$
$$= \underbrace{\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{i+1} b^{n-1-i}}}_{j=i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^i b^{n-i}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} a^j b^{n-j} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^i b^{n-i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} a^i b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^i b^{n-i}$$
$$= \underbrace{\binom{n-1}{n-1}}_{\shortparallel} a^n b^0 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} a^i b^{n-i} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^i b^{n-i}$$
$$= \binom{n}{0} a^0 b^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}\right) a^i b^{n-i} + \underbrace{\binom{n-1}{0}}_{\shortparallel} a^0 b^n + \binom{n}{n} a^n b^0$$
$$= \binom{n}{0} a^0 b^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} + \binom{n}{n} a^n b^0$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

综上, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

推论: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Pf: 令 $a=b=1$, $(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Rightarrow 2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

集合

定义: 一些(有限或无限)具有共同性质的个体的总和.

例 $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

性质(分配律). 设 Λ. 指标集, 每一个 λ 对应一个集合 S_λ. 再设 T 是一个集合. 则

(i) $T \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (T \cap S_\lambda)$

(ii) $T \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (T \cup S_\lambda)$

差: $S \setminus T = \{x \in S \mid x \notin T\}$.

笛卡尔积 设 $S_1, S_2, \cdots, S_k \neq \phi$,

$S_1 \times \cdots \times S_k := \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in S_1, \cdots, x_k \in S_k\}$

容量: 集合 S 的总个数记为 $\mathrm{card}(S)$ 或 $|S|$. 规定 $|\phi| = 0$.

映射

定义: 设 $S, T \neq \phi$. $f \subset S \times T$. 如果

① $\forall x \in S$, $\exists y \in T$, 使得 $(x, y) \in f$

② $\forall x \in S$, 如果 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$, 则 $y_1 = y_2$.

则称为 f 是从 S 到 T 的映射.

记为
$$f: S \longrightarrow T$$
$$x \longmapsto y := f(x), \quad y \text{ 唯一}$$

例
$$\mathrm{id}_S : S \longrightarrow S$$
$$x \longmapsto x$$

像集 $\operatorname{im}(f) := f(S)$

逆映射: $f^{-1}(y) := \{x \mid f(x) = y\}$.

$f^{-1}(W) := \{x \mid f(x) \in W\}$，这里 $W \subseteq T$.

单射: $\forall x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

等价定义: $\forall x_1, x_2 \in S$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

(证明单射用后者较多)

满射: $\forall y \in T$, $\exists x \in S$, s.t. $y = f(x)$.

双射: 单+满.

应用: 设映射 $f: A \to B$. 证明: f 为单射 $\Leftrightarrow$ 存在 $g: B \to A$, 使得 $g \circ f = id_A$

pf: "$\Rightarrow$" 设 f 为单射, 下面构造 g.

$\forall y \in B$,

(i) 若 $y \in \operatorname{im}(f)$, 则 $\exists x \in A$, s.t. $y = f(x)$

f 为单射 $\Rightarrow f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$.

令 $g(y) := x$

(ii) 若 $y \notin \operatorname{im}(f)$, 任取 $\tilde{x} \in A$, 令 $g(y) = \tilde{x}$

构造 $g: B \longrightarrow A$

$$y \in \operatorname{im}(f) \longmapsto x$$
$$y \notin \operatorname{im}(f) \longmapsto \tilde{x}$$

$\forall x \in A$,

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$

$\Rightarrow$ 存在 $g: B \to A$, 使得 $g \circ f = id_A$

"$\Leftarrow$"

$\forall x_1, x_2 \in A$，使得 $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow$ $g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2)$

$\exists g: B \to A$, s.t. $g\circ f = id_A$ $\Rightarrow$ $g\circ f(x_1) = x_1$, $g\circ f(x_2) = x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ f为单射.

"$\Rightarrow$" 令

(法二)

$$\tilde{f}: A \longmapsto im(f)$$
$$x \longmapsto f(x)$$

易知 $\tilde{f}(A) = f(A) = im(f)$，故 $\tilde{f}$为满射.

结合f为单射，可得 $\tilde{f}$为双射. 从而 $\tilde{f}$可逆. 故$\exists \tilde{f}^{-1}$

定义：$g: B \longrightarrow A$.

$$\underset{im(f)}{x \in} \longmapsto \tilde{f}^{-1}(x)$$

$$\underset{im(f)}{x \notin} \longmapsto a,\ a为A中某个元素$$

此时 g 为一个映射. 且 $\forall x \in B$.

$$g\circ f(x) = g(\underset{im(f)}{f(x)}) = \tilde{f}^{-1}(f(x)) = x$$

$\Rightarrow$ 存在 $g: B \to A$，使得 $g\circ f = id_A$.