第一周习题课

郑晓鹏

中国科学院数学与系统科学研究院

习题课任务

1. 讲解作业题以及作业中出现的问题;
2. 结合作业题复习上一周课上的重点内容;
3. 一些补充的知识.

问题 1

设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是实数, 且多项式 $p(x) = ax^2 + bx + c$ 满足

$$p(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, 2.$$

列出 $p(x)$ 的系数 a, b, c 满足的线性方程组以及该方程组对应的系数矩阵和增广矩阵.

解: 根据 $p(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, 2$, 得

$$a\alpha_1^2 + b\alpha_1 + c = \beta_1,$$
$$a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c = \beta_2.$$

所以该方程的系数矩阵为:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 \end{pmatrix},$$

增广矩阵为:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 & \beta_1 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

一般的实系数线性方程组表述如下:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array}\right. .$$

它有 n 个未知数数和 m 个方程, 则该方程的系数矩阵为:

一般的实系数线性方程组表述如下:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}.$$

它有 n 个未知数数和 m 个方程, 则该方程的系数矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

增广矩阵为:

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

问题 2

判断下列两个线性方程组是相容的还是不相容的; 如果相容, 判断是确定的还是不定的。*(鼓励用矩阵语言写)*

$$(1)\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y+2z=6, \\ x+y+3z=2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} y+z=4 \\ 2x+y+3z=1 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$$

定义 1

如果线性方程组有解，则称它是相容的 *(compatible)*. 否则称之为不相容的. *(incompatible)*. 设方程组相容. 如果它的解唯一，则称之为确定的 *(deterministic)*. 否则称之为不确定的 *(non-deterministic)*.

三类初等行变化

设 $A=(a_{i,j})_{m\times n}$ 是 $m\times n$ 的实矩阵, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$.

第一类：把 A 中第 i 行和第 j 行互换位置得到矩阵 A'.

$$A=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j} A'=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

第二类: 设 $i \neq j$ (i, j 没有大小关系), α 是实数. 把 A 的第 i 行通乘 α 后加到第 j 行上得到矩阵 A'.

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{r_j + \alpha r_i} A' = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} + \alpha a_{i,1} & a_{j,2} + \alpha a_{i,2} & \cdots & a_{j,n} + \alpha a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

第三类: 设 α 是非零实数. 把 A 的第 i 行通乘 α 得到矩阵 A'.

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha r_i} A' = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i,1} & \alpha a_{i,2} & \cdots & \alpha a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

定义 2

设 L 和 L' 是两个实系数 n 元线性方程组. 如果或者 L 和 L' 都不相容, 或者 L 和 L' 有相同的实解, 则称它们是等价的.

命题 3

设 n 元线性方程组 L 的增广矩阵是 B, 对 B 进行有限次初等行变换得到矩阵 B'. 再设 B' 对应的线性方程组是 L'. 则 L 与 L' 等价.

高斯消去法 (有条理地进行消元)

设 L 是一个 n 元线性方程组, 其系数矩阵为 A, 增广矩阵为 $B=(A\mid\mathbf{b})$. 通过高斯消去法我们可以对 B 做有限次初等行变换把系数矩阵 A 化为阶梯型得到: 矩阵

$$D=(C|\mathbf{d})\begin{pmatrix}
0\cdots0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & *\ *\cdots* & d_1\\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & *\ *\cdots* & d_2\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet\ *\cdots* & d_k\\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\ 0\cdots\ 0 & d_{k+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\ 0\cdots\ 0 & d_m
\end{pmatrix}$$

高斯消去法 (有条理地进行消元)

设 L 是一个 n 元线性方程组, 其系数矩阵为 A, 增广矩阵为 $B=(A\mid \mathbf{b})$. 通过高斯消去法我们可以对 B 做有限次初等行变换把系数矩阵 A 化为阶梯型得到: 矩阵

$$D=(C|\mathbf{d})\begin{pmatrix} 0\cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & *\ *\cdots * & d_1 \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & *\ *\cdots * & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet\ *\cdots * & d_k \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\ 0\cdots 0 & d_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\ 0\cdots 0 & d_m \end{pmatrix}$$

定理 4

利用上述记号. 我们有

1. L 相容当且仅当 $d_{k+1}=\cdots=d_m=0$;
2. L 确定当且仅当 $d_{k+1}=\cdots=d_m=0$ 且 $k=n$.

问题 2

判断下列两个线性方程组是相容的还是不相容的; 如果相容, 判断是确定的还是不定的。(鼓励用矩阵语言写)

$$(1)\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y+2z=6, \\ x+y+3z=2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} y+z=4 \\ 2x+y+3z=1 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$$

解: (1) 方程的增广矩阵为: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 根据高斯消去法, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

根据讲义中的定理 2.5, 可得方程 (1) 是相容的, 而且确定的.

(2) 方程的增广矩阵为: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 根据高斯消去法, 有

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

根据讲义中的定理 2.5, 可得方程 (2) 是不相容的.

问题 3

设下列实系数方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}.$$

有两组解:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n \end{cases} \text{和} \begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{cases}.$$

证明: 对任意实数 c,

$$\begin{cases} x_1 = c\alpha_1 \\ x_2 = c\alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = c\alpha_n \end{cases} \text{和} \begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n + \beta_n \end{cases}$$

也是方程组 *(1)* 的解.

证明：因为$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n \end{cases}$ 是方程组的解，所以 $\sum_{j=1}^n a_{i,j}\alpha_j = 0$, $i = 1, \ldots, m$, 可得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} c\alpha_j = c\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\alpha_j = 0, i = 1, \ldots, m.$$

所以$\begin{cases} x_1 = c\alpha_1 \\ x_2 = c\alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = c\alpha_n \end{cases}$ 也是方程组的解. 由$\begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{cases}$ 是方程组的解，所以 $\sum_{j=1}^n a_{i,j}\beta_j = 0$, $i = 1, \ldots, m$, 可得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\alpha_j + \beta_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\beta_j = 0, i = 1, \ldots, m.$$

所以$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n + \beta_n \end{cases}$ 也是方程的解.

补充内容: 数学归纳法

公理: 最小数原理

对于正整数 $\mathbb{N}^+$ 的任意一个非空子集 S 必存在最小数, 即若 $S \subset \mathbb{N}^+$, $S \neq \emptyset$, 存在 $a \in S$, 使得对任意 $c \in S$, 都有 $a \le c$.

定理 4 (数学归纳法原理)

设有一个与正整数 n 有关的命题. 如果

1. 当 $n=1$ 时，命题成立;
2. 假设 $n=k,\ k\in\mathbb{N}^+$ 时命题成立，则 $n=k+1$ 时命题也成立;

那么这个命题对于一切正整数 n 都成立.

证明：反证法. 假设命题不是对所有正整数成立的. 设

$$S=\{i\in\mathbb{N}^+ \mid \text{命题对于 } n=i \text{ 时不成立}\}.$$

则 S 是 $\mathbb{N}^+$ 的非空子集. 由最小数原理可知, S 存在最小数, 假设其为 h. 因为 $1\notin S$(条件 1), 所以 $h\neq 1$, 则 $h-1$ 也是正整数. 但由于 h 是 S 中的最小数, 所以 $h-1\notin S$, 则根据 S 的定义得命题对于 $n=h-1$ 时成立. 根据条件 2 可知命题对于 h 时也成立, 得 $h\notin S$, 矛盾.

应用数学归纳法的两种思考方式 (注: 两种思维方式只是脑子里思考时有所不同, 根据的数学归纳法原理是相同的):

1. 先试试 $n=1$ 时对不对, 想想如何通过 $n=1$ 是对的, 推出 $n=2$ 是对的, 再想想如何通过 $n=2$ 是对的推出 $n=3$ 是对的, 最后思考有没有一个普遍的方法, 假设当 $n=k$ 时是对的, 可以推出 $n=k+1$ 是对的. (这种想法类似于: " 以此类推,...")

应用数学归纳法的两种思考方式 (注: 两种思维方式只是脑子里思考时有所不同, 根据的数学归纳法原理是相同的):

1. 先试试 $n = 1$ 时对不对, 想想如何通过 $n = 1$ 是对的, 推出 $n = 2$ 是对的, 再想想如何通过 $n = 2$ 是对的推出 $n = 3$ 是对的, 最后思考有没有一个普遍的方法, 假设当 $n = k$ 时是对的, 可以推出 $n = k + 1$ 是对的. (这种想法类似于: " 以此类推,...")

例: 设方程组 T_n 的增广矩阵是

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ 都不等于零. 证明: T_n 是确定的.

先想想具体例子: 比如 $n=1$ 时, 具体例子: 方程 $x_1=4$, 显然它有唯一解. 再想想 $n=2$, 比如方程:

$$\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ \qquad\ \ x_2=4, \end{cases}$$

则我们可以把 $x_2=4$ 代入第一个方程, 得 $x_1=1$.

再想想 $n=3$, 比如方程:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=7 \\ \qquad\ \ x_2+x_3=5 \\ \qquad\qquad\ \ x_3=4, \end{cases}$$

根据 $n=2$ 的情况我们知道 $x_3=4$, $x_2=1$. 将其带入第一个方程, 得 $x_1=2$. 通过这个过程我们可以发现, 如果通过 $k-1$ 阶上述形式的方程如果有唯一解, 则 k 阶的上述形式的方程也有唯一解. 所以这种思路对应的数学归纳法证法如下:

例题的证明:

当 $n=1$ 时, $a_{1,1}x_1=b_1$, 则 $x_1=b_1/a_{1,1}$ $(a_{1,1}\neq 0)$.
假设当 $n=k-1$ 时, $k>=2$, $k\in\mathbb{N}^+$, 命题结论成立;
当 $n=k$ 时, 考虑方程组:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ \qquad\qquad a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n=b_n \end{cases}.$$

因为下列方程组是 $k-1$ 个变量的,

$$\begin{cases} a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad a_{n,n}x_n=b_n \end{cases}.$$

所以根据归纳假设有, 上述方程有唯一解, 设唯一解为

$$x_2=\alpha_2,\cdots,x_n=\alpha_n,$$

将其代入原方程组的第一个方程, 有 $x_1=(b_1-\sum_{j=2}^n a_{1,j}\alpha_j)/a_{1,1}$ $(a_{1,1}\neq 0)$, 所以 $n=k$ 时方程也是有唯一解: $x_1=(b_1-\sum_{j=2}^n a_{1,j}\alpha_j)/a_{1,1}$, $x_i=\alpha_i, i=2,\ldots,n$.

根据数学归纳法原理, 命题对于任意正整数成立;

2. 先试试 $n=1$ 时对不对, 再直接想 $n=k$ 时, 要通过什么操作对该命题进行降阶, 化成关于 $n=k-1$ 的命题. 如果可以转化为关于 $k-1$ 的命题就大功告成了.

2. 先试试 $n=1$ 时对不对, 再直接想 $n=k$ 时, 要通过什么操作对该命题进行降阶, 化成关于 $n=k-1$ 的命题. 如果可以转化为关于 $k-1$ 的命题就大功告成了.

例: 设方程组 T_n 的增广矩阵是

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ 都不等于零. 证明: T_n 是确定的.

比如现在要让你证明

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=11\\ x_2+x_3+x_4&=7\\ x_3+x_4&=5\\ x_4&=3 \end{aligned}$$

有唯一解. 此时是 $n=4$ 的方程, 我们想办法把它降阶, 由第 4 个方程可知, $x_4=3$, 所以将其代入原方程, 可得

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=8\\ x_2+x_3&=4\\ x_3&=2 \end{aligned}$$

则我们得到一个 $n=3$ 的方程, 同样的方法对问题进行降阶, 由第 3 个方程可知 $x_3=2$, 则将其代入上述方程可知

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=6\\ x_2&=2 \end{aligned}$$

变成一个 $n=2$ 的方程, 再由 $x_2=2$, 代入第一个方程, $n=1$ 的方程: $x_1=4$. 所以这种思路对应的数学归纳法的证明如下:

证明: 当 $n=1$ 时, $a_{1,1}x_1=b_1$, 则 $x_1=b_1/a_{1,1}$ $(a_{1,1}\neq 0)$.

假设当 $n=k-1$, $k>=2$, $k\in\mathbb{N}^+$ 时, 命题结论成立;

当 $n=k$ 时, 考虑方程组:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n-1}x_{n-1}+a_{1,n}x_n=b_1 \\ \qquad\qquad a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n-1}x_{n-1}+a_{2,n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n-1,n-1}x_{n-1}+a_{n-1,n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n=b_n \end{cases}.$$

由最后一个方程可知 $x_n=b_n/a_{n,n}$ $(a_{n,n}\neq 0)$. 将其代入原方程可得

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n-1}x_{n-1}=b_1-a_{1,n}\dfrac{b_n}{a_{n,n}} \\ \qquad\qquad a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n-1}x_{n-1}=b_2-a_{2,n}\dfrac{b_n}{a_{n,n}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n-1,n-1}x_{n-1}=b_n-a_{n-1,n}\dfrac{b_n}{a_{n,n}} \end{cases}.$$

所述方程为 $n=k-1$ 的方程, 而且 $a_{i,i}\neq 0$, $i=1,\ldots,n-1$, 于是根据归纳假设, 上述方程有唯一解, 假设为 $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, ..., $x_{n-1}=\alpha_{n-1}$. 则原方程有唯一解 $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, ..., $x_{n-1}=\alpha_{n-1}$, $x_n=b_n/a_{n,n}$. 于是命题对于 $n=k$ 时也成立.

根据数学归纳法原理, 命题对于任意正整数 n 都成立.

定理 5 (第二数学归纳法原理)

设有一个与正整数 n 有关的命题. 如果

1. 当 $n=1$ 时命题成立;
2. 假设命题对于一切小于 k 的正整数来说成立, 则命题对于一切正整数 n 来说都成立.

那么命题对于一切正整数 n 来说都成立.

证明: 和第一数学归纳法类似, 当 h 是 S 中的最小元时, 对于 $l<h$, $l\in\mathbb{N}^+$, 有 $l\notin S$, 所以命题对于所有 $n=l$ 都成立, 由条件 2 推出 $n=h$ 时也成立, 矛盾.

例 5

设 $a_1=1$, $a_2=1$, $a_i=a_{i-1}+a_{i-2}$, 证明:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

证明: (由于递推式是关于前面两项的, 所以我们归纳基础需要验证前两项) 容易验证, 当 $n=1,2$ 时, 命题成立;
假设当 $n<k$, $k\geq 3$, $n\in\mathbb{N}^+$ 时, 命题成立.
对于 $n=k$ 时,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right]\overset{\text{归纳假设}}{=}a_{n-1}+a_{n-2}=a_n.
\end{aligned}$$

所以命题对于 $n=k$ 时也成立. 根据数学归纳法原理, 命题对于任意 $n\in\mathbb{N}^+$ 都成立.

科普: 多元高次方程组的求解

问题 6

给一个高次的方程组, 问:

1. 如果方程组的解有限多个, 如何把解算出来.
2. 给另外一个方程, 问是否可以通过上面的方程推出它是不是对的. *(非严谨表示)*

例 6

假设方程组如下:

$$\begin{cases} x^2 + y + z = 1 \\ x + y^2 + z = 1 \\ x + y + z^2 = 1 \end{cases}$$

问:

1. 方程的解是什么?
2. $x^2 - x - y^2 + +y = 0$ 能否通过上述方程推出.

问题: 对于高次方程, 高斯消去法不再适用.

问题: 对于高次方程, 高斯消去法不再适用.

在 19 世纪, Buchberger 给出了Grobner 基的概念, 提出了计算多元高次方程组的通用算法, 当方程组的解是有限多个时, 可以把方程化为三角型. (可以看做推广的高斯消去法)

例 7

假设方程组如下:

$$\begin{cases} x^2 + y + z = 1 \\ x + y^2 + z = 1 \\ x + y + z^2 = 1 \end{cases}$$

计算 Grobner 基, 可得上述方程等价于下面的方程:

$$\begin{cases} x + y + z^2 = 1 \\ y^2 - y - z^2 + z = 0 \\ 2yz^2 + z^4 - z^2 = 0 \\ z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2 = 0 \end{cases}$$

最后一个方程只含变量 z, 倒数两个方程只含变量 y, z, 第一个方程含变量 x, y, z, 上述形式就非常类似于我们的阶梯型.

Grobner 基可以看成多元高次方程组求解 (化简, 消元) 的通用工具, 对于 Grobner 基的高效算法仍然是当前一个重要的研究领域. 而且 Grobner 基在其他领域也有广泛的应用, 比如化学反应的平衡, 生态系统, 密码学等.

谢谢大家！