1. 已知多项式 $x^3-7x+\lambda\in\mathbb{C}[x]$ 有两个根的比值是2，求 λ.

解：设多项式的根为 $\alpha, 2\alpha, \beta$

由根与系数的关系可得，
$$\begin{cases}\alpha+2\alpha+\beta=0\\ \alpha\cdot2\alpha+\alpha\cdot\beta+2\alpha\cdot\beta=-7\\ \alpha\cdot2\alpha\cdot\beta=-\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\alpha+\beta=0\\ 2\alpha^2+3\alpha\beta=-7\\ 2\alpha^2\beta=-\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=-3\alpha\\ \alpha^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-3\end{cases}\text{ or }\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=3.\end{cases}$$

$\Rightarrow\lambda=\pm6.$

2. Pf: 假设 $\gcd(a,b_1\cdots b_n)\neq1$，则 $\exists$ 素元 $p\in D^*$，$p|a$，$p|b_1b_2\cdots b_n$.

由素元的定义可知，$p|b_1$ or $p|b_2\cdots b_n$.

若 $p|b_1$，则 $p|\gcd(a,b_1)$ $\rightarrow\leftarrow$.

若 $p|b_2\cdots b_n$，，

……

$\exists i\in\{2,\cdots,n\}$, s.t. $p|b_i$ $\Rightarrow p|\gcd(a,b_i)$ $\rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow\gcd(a,b_1\cdots b_n)=1.$

3. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$. 若 $\alpha=a/b\in\mathbb{Q}$ 为其根，其中 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $\gcd(a,b)=1$.

则 $a|a_0$ 且 $b|a_n$.

对于 x^2+4，若其在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约，则可以分解成一次因式之积；故 x^2+4 有有理根，设其为 $\frac{a}{b}$.

则 $a|4$, $b|1$. 故 $a=\pm1,\pm2,\pm4$, $b=\pm1$.

$\Rightarrow\pm1,\pm2,\pm4$ 为 x^2+4 的有理根，$\rightarrow\leftarrow$

对于 x^3+4，若在 $\mathbb{Q}$ 上可约，则 x^3+4 只有能分解成一个一次因式和二次因式之积或一次因式的3次方.

总之 x^3+4 在 $\mathbb{Q}$ 上有根 α，只能是 $\pm1,\pm2,\pm4$

显然 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 中无根，则 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

对于 x^4+4，

法一：观察法 $x^4+4+4x^2-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

法二：(待定系数法) $x^4+4=(x^2+ax+b)(x^2+cx+\frac{4}{b})$

$=x^4+(a+c)x^3+(ac+b+\frac{4}{b})x^2+(\frac{4a}{b}+bc)x+4$

由 x^4+4 无有理根，

$$\Rightarrow\begin{cases}a+c=0 & ①\\ ac+b+\frac{4}{b}=0 & ②\\ \frac{4a}{b}+bc=0 & ③\end{cases}$$

由①得 $c=-a$，由③得 $\frac{4a}{b}-ab=0$

(i) $a=0$，$c=0$，b 无解

(ii) $b=2$，代入②得 $ac+4=0$，即：$-a^2+4=0$，即 $a=\pm 2$.

$$\begin{cases} a=2,\ c=-2 \\ a=-2,\ b=2,\ c=2 \end{cases} \Rightarrow (x^4+4) \underset{=}{=} (x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

(iii) $b=-2$，代入②得，$ac-4=0 \Rightarrow -a^2-4=0 \Rightarrow$ 无解

4. Pf: $\phi_p: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$

$\sum_i a_i x^i \mapsto \sum_i \bar{a}_i x^i$　f是本原的.

claim：若 $\deg(\phi(f))=\deg(f)$，则 f 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中可约，可推出 $\phi(f)$ 在 $\mathbb{Z}_p[x]$ 中可约.

Pf：若 $\exists\ g,h\in\mathbb{Z}[x]$ 且 $\deg(g)\geq 1$，$\deg(h)\geq 1$，s.t $f=gh$.

$$\Rightarrow \phi(f)=\phi(gh)=\phi(g)\phi(h)$$

$$\deg(\phi(f))=\deg(f) \Rightarrow \deg(\phi(g))=\deg(g),\quad \deg(\phi(h))=\deg(h)$$

$\Rightarrow \phi(f)$ 在 $\mathbb{Z}_p[x]$ 中可约.

$\phi_p(f(x))=x^p-x-1$，　$\phi_p(g(x))=x^p-x-1$

$f(x)$在$\mathbb{Z}_p[x]$中不可约 $\Rightarrow$ $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可约.　　$\mathbb{Q}$是$\mathbb{Z}$的分式域

注意到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中是本原的，从而 $f(x)$，$g(x)$在$\mathbb{Z}[x]$中的可约性 $\Leftrightarrow$ $f(x)$，$g(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$中可约性.

$\Rightarrow f(x)$，$g(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

(定理5.32推论)

反例：$\phi_2: \mathbb{Z}[x] \mapsto \mathbb{Z}_2[x]$.

$f=(2x-1)(x+1)$　但 $\deg(\phi_2(f))\neq\deg(f)$.

$\phi_2(f)=(\bar{2}x-\bar{1})(x+\bar{1})=-(x+\bar{1})$.

f在$\mathbb{Z}[x]$中可约，但在$\mathbb{Z}_2[x]$中可约.

反例 若 $f=2(x^2+1)\in\mathbb{Z}[x]$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中可约，(注意到 2是不可约元)，但 f在$\mathbb{Q}[x]$中不可约.

3. x^5+x^3+2x+1

设 $\phi_2: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2[x]$

$\sum_i a_i x^i \mapsto \sum_i \bar{a}_i x^i$

$\phi_2(x^5+x^3+2x+1)=x^5+x^3+1$.

假设 x^5+x^3+1 在$\mathbb{Z}_2$中可约，注意到 ± 1 均不是其根，故 x^5+x^3+1 只能分解成一个二次和一个三次的不可约多项式之积.

$\mathbb{Z}_2$中二次不可约多项式：x^2+x+1

$\mathbb{Z}_2$中三次不可约多项式：x^3+x+1，x^3+x^2+1

但显然 $x^5+x^3+1 \neq (x^2+x+1)(x^3+x+1)$，$(x^5+x^3+1) \neq (x^2+x+1)(x^3+x^2+1)$.

$\Rightarrow$ x^5+x^3+1 在 $\mathbb{Z}_2[x]$中不可约

$\Rightarrow$ x^5+x^3+1 在 $\mathbb{Q}[x]$中不可约.

5. 证明全次数为m的n变元单项式的个数为 $\binom{m+n-1}{m}$

证明：设单项式 $M=x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$.

$\deg(M)=m \Leftrightarrow i_1+\cdots\cdots+i_n=m \quad (i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbb{N})$.

$\Leftrightarrow \underbrace{(i_1+1)}_{j_1}+\cdots+\underbrace{(i_n+1)}_{j_n}=m+n$

$\Leftrightarrow j_1+\cdots+j_n=m+n \quad (j_1,j_2,\cdots,j_n\in\mathbb{Z}^+)$

$\Rightarrow$ 次数为m的单项式的个数等于方程

$z_1+\cdots+z_n=m+n$

的正整数解的个数. 相当于把$m+n$个球排成一排，把它们分成 n个组，求分法数.

$$\underbrace{0\cdots\cdots0}_{z_1}\;|\;\underbrace{0\cdots\cdots0}_{z_2}\;|\;\cdots\cdots\;|\;\underbrace{0\cdots\cdots0}_{z_n}$$

共有 $m+n$个"0"，$m+n-1$个"1"

$\Rightarrow$ 总数为 $\binom{m+n-1}{m}$.

延拓：证明全次数不超过m的n变元单项式的个数为 $\binom{m+n}{n}$.

解：当$n=1$时，这些单项式是$1, x, x^2, \cdots, x^m$ 共 $m+1$个.

当$n=2$时，x^ix^j $i,j\in\{0,1,\cdots,d-i\}$ 且 $i+j\leq m$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{m}(m-i+1) = \frac{(m+2)(m+1)}{2}$

设单项式 $M=x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$.

$\deg(M)\leq m \Leftrightarrow i_1+\cdots+i_n\leq m \quad (i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{N})$

$\Leftrightarrow i_0+i_1+\cdots+i_n=m$

$(i_0,i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{N})$

$\Leftrightarrow \underbrace{(i_0+1)}_{j_0}+\underbrace{(i_1+1)}_{j_1}+\cdots+\underbrace{(i_n+1)}_{j_n}=m+n+1$

$\Leftrightarrow j_0+j_1+\cdots+j_n=m+n+1$

$j_0,j_1,\cdots,j_n\in\mathbb{Z}^+$.

$\Rightarrow$ 总数 $\binom{m+n}{n}$

判定多项式可约性方法

①Eisenstein 判别法

D是UFD，F是D的分式域，

$$f=f_n x^n+f_{n-1}x^{n-1}+\cdots+f_0,$$

其中$n>0$，$f_n, f_{n-1}, \cdots, f_0 \in D$ 且 $f_n\neq 0$，设 P是D中的不可约元．如果

$$P\nmid f_n,\ P\mid f_{n-1}, \cdots, P\mid f_0,\ P^2\nmid f_0$$

则 f在F[x]中不可约．

（把具体类比．$D:=\mathbb{Z}$，$F:=\mathbb{Q}$）．

例 $f(x)=3x^3+15x+10 \in \mathbb{Z}[x]$，判断 $f(x)$在$\mathbb{Q}[x]$中的可约性．（$\to 3x^3+0\cdot x^2+15\cdot x+10$）

$5\in\mathbb{Z}$是不可约元．（$\mathbb{Z}$中$\boxed{\text{素数}\Leftrightarrow\text{不可约}}$）．

$5\nmid 3,\ 5\mid 0,\ 5\mid 15,\ 5\mid 10,\ 5^2\nmid 10$

$\Rightarrow$ $f(x)$在$\mathbb{Q}[x]$中不可约．

②整根测试 hw.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$．若$f(x)$有有理根 $\frac{b}{a}\in\mathbb{Q}$，$\gcd(a,b)=1$ 且 $ab\neq 0$，

则 $a\mid a_n$，$b\mid a_0$．

③约化判别法

$f\in\mathbb{Z}[x]$，$\phi:\mathbb{Z}[x]\mapsto\mathbb{Z}_p[x]$

$\sum_i a_i x^i\mapsto\sum_i \bar{a}_i x^i$

若$\deg(\phi(f))=\deg(f)$，则 f在$\mathbb{Z}[x]$中可约 $\Rightarrow$ $\phi(f)$在$\mathbb{Z}_p[x]$中可约．

抽象线性空间

定义．设域F，交换群$(V,+,\vec{0})$ 映射：$F\times V\longmapsto V$ 满足$\forall\ \alpha,\beta\in F,\vec{v}\in V$，

(i) $(\alpha\beta)\vec{v}=\alpha(\beta\vec{v})$ （结合律）

(ii) $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$ （则称为数乘）．

且对$\forall\alpha,\beta\in F$，$\vec{v},\vec{w}\in V$． $\begin{cases}(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}\\ \alpha(\vec{v}+\vec{w})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w}\end{cases}$ （分配律）．

则称V是域F上的线性空间．

子空间

$W\subseteq V$，满足$\forall\ \vec{x},\vec{y}\in W$，$\alpha,\beta\in F$，$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in W$

（加法，数乘封闭）．

设 W_1, W_2 为 V 的子空间，则

$W_1+W_2 := \{\vec{v_1}+\vec{v_2} \mid \vec{v_1}\in W_1,\ \vec{v_2}\in W_2\}$.

$W_1\cap W_2 := \{\vec{v} \mid \vec{v}\in W_1$ 且 $\vec{v}\in W_2\}$.

claim: W_1+W_2, $W_1\cap W_2$ 都是 V 的子空间

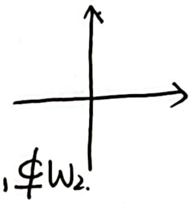
$\forall\ \alpha, \beta\in F$, $\vec{v_1}, \vec{v_2}\in W_1\cap W_2$.

由于 W_1 是 V 的子空间，则 $\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}\in W_1$,

同理， $\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}\in W_2$

$\Rightarrow$ $\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}\in W_1\cap W_2$

$\Rightarrow W_1\cap W_2$ 都是 V 的子空间.



但是. $W_1\cup W_2$ 不一定是子空间.

Claim: 若 W_1 和 W_2 互不包含，即 $W_1\nsubseteq W_2$.

且 $W_2\nsubseteq W_1$)，则 $W_1\cup W_2$ 不是 V 的子空间.

$\mathbb{R}^2$ 坐标空间中，

$W_1 := \{(x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}$

$W_2 := \{(0,x) \mid x\in\mathbb{R}\}$.

$W_1\cup W_2$ 不是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间.

$(1,0)\in W_1$, $(0,1)\in W_2$.

$(1,1)\notin W_1\cup W_2$.

证明:（反证法）. 假设 $W_1\cup W_2$ 是 V 中子空间.

$W_1\nsubseteq W_2 \Rightarrow \exists\ \vec{v_1}\in W_1$, s.t $\vec{v_1}\notin W_2$.

同理 $\exists\ \vec{v_2}\in W_2$, $\vec{v_2}\notin W_1$

令 $\vec{v} := \vec{v_1}+\vec{v_2}$. 下证 $\vec{v_1}+\vec{v_2}\notin W_1$ 且 $\vec{v_1}+\vec{v_2}\notin W_2$.

假设 $\vec{v_1}+\vec{v_2}\in W_1$，由 $\vec{v_1}\in W_1 \Rightarrow \vec{v_2}\in W_1 \to \Leftarrow$.

$\Rightarrow \vec{v_1}+\vec{v_2}\notin W_1$

同理. $\vec{v_1}+\vec{v_2}\notin W_2$

$\Rightarrow W_1\cup W_2$ 不是 V 中的子空间

例 设 $D_0 = \{A\in M_n(F) \mid \det(A)=0\}$. 证明：$D_0$ 是 $M_n(F)$ 的子空间当且仅当 $n=1$.

解：当 $n=1$ 时，det 是恒同映射.

当 $n>0$，$A=\begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}_{n\times n}\in D_0$，$B=\begin{pmatrix}0&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}_{n\times n}\in D_0$.

$\det(A+B)=\det(E_n)=1$.

$\Rightarrow A+B\notin D_0$.

$\Rightarrow D_0$ 不是 $M_n(F)$ 的子空间

(直和) Def. 设 $V_1, \cdots, V_k$ 为 V 的子空间，如果和空间 $W = V_1 + \cdots + V_k$

满足：对 $\forall \vec{w} \in W$，$\exists!\ \vec{v_1} \in V_1, \cdots, \vec{v_k} \in V_k$, s.t.

$$\vec{w} = \vec{v_1} + \cdots + \vec{v_k}$$

则称 W 是 $V_1, \cdots, V_k$ 的直和，并记为

$$W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

直和的等价

Thm. V 是线性空间，$V_1, \cdots, V_k$ 是 V 的子空间，且 $W = V_1 + \cdots + V_k$，则下述结论等价

(i) W 是 $V_1, \cdots, V_k$ 的直和

(ii) 如果 $\vec{0} = \vec{v_1} + \cdots + \vec{v_k}$，$\vec{v_i} \in V_i$，$i = 1, \cdots, k$，则 $\vec{v_1} = \cdots = \vec{v_k} = \vec{0}$

(iii) 对任意 $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$，

$$V_i \cap \Big(\sum_{j \neq i} V_j\Big) = \{\vec{0}\},$$

→ 不等价 $V_i \cap V_j = \{\vec{0}\}$，$j \neq i$

矩阵空间加法类比数乘

矩阵加法 $\lambda - A$

$A + B$

如 $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_1 \cap V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$V_1 \cap V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$V_2 \cap V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

但 $\underset{\overset{\parallel}{V_3}}{V_3 \cap (V_1 + V_2)} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

例 直和不满足消去律，即：设 V_1, V_2, V_3 为 V 的子空间，且 $W = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3$

$\not\Rightarrow V_2 = V_3$.

反例：$V = \mathbb{R}^2$，$W = \mathbb{R}^2$，$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$，$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

自行验证：$W = V_1 \oplus V_2$

$W = V_1 \oplus V_3$.

$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y-x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1 + V_3$.

$\Rightarrow W \subseteq V_1 + V_3$.

由于 $V_1, V_3 \subseteq W$，则 $V_1 + V_2 \subseteq W$.

$\Rightarrow W = V_1 + V_3$.

再设 $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_1 \cap V_3$，则 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_1 \Rightarrow x = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_3 \Rightarrow y = x = 0$.

$\Rightarrow V_1 \cap V_3 = \{\vec{0}\}$.

$\Rightarrow W = V_1 \oplus V_3$.

此时 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V_3$. $\Rightarrow V_2 \neq V_3$.

线性相关性.

Def. F是一个域, V是域F上的线性空间, $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k} \in V$

若∃不全为0的域F中元素 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$, s.t. $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v_i} = 0$.

则 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_k}$ 在F上线性相关, 否则称 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_k}$ 在F上线性无关.

例 $f, g \in C^1(a,b)$. 令

$$W_2 = \det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} = 0, \quad \to \text{二阶 Wronskian 行列式}$$

(例1.25.推论)

若 $\exists x_0 \in [a,b]$, s.t. $W_2 \neq 0$

则 f, g 是线性无关的.

例 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in C^{(n-1)}[a,b]$. 令

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

称为 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 的n阶 Wronskian 行列式

证明: 如果 $\exists x_0 \in [a,b]$, 使得 $W(x_0) \neq 0$, 则 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 线性无关 (R上)

pf: 假设 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ 线性相关, 则 $\exists a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, s.t

$$a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow a_1 f_1'(x) + \cdots + a_n f_n'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_1 f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n f_n^{(n-1)}(x) = 0.$$

$\Rightarrow W(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$. $\to \Leftarrow$.

$\Rightarrow f_1(x), \cdots, f_n(x)$ 线性无关