1. (i) 显然 $0\in V$,

法一: $\forall A,B\in V,\ \alpha,\beta\in F$

$tr(\alpha A+\beta B)=\alpha tr(A)+\beta tr(B)=0+0=0$

$\Rightarrow \alpha A+\beta B\in V$

$\Rightarrow$ V是$M_n(F)$的子空间

法二: $\phi: M_n(F)\longmapsto F$

$A\mapsto tr(A)$

claim: ϕ为线性映射.

设 $\alpha,\beta\in F$, $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 其中 $a_{ij},b_{ij}\in F$.

则 $\alpha A+\beta B=(\alpha a_{ij}+\beta b_{ij})$

$tr(\alpha A+\beta B)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii}+\beta b_{ii})=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\beta\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\alpha tr(A)+\beta tr(B)$

$\Rightarrow \phi$为线性映射

易知 $V=ker(\phi)$

$\Rightarrow$ V是$M_n(F)$的子空间

法四: $\phi: V\to V$.

$ker(\phi)$, $im(\phi)$ 是 V 的子空间.

法三: $V=\{A\in M_n(F)\mid a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=0\}$

V是齐次线性方程组 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=0$ 的解空间，故

V是$M_n(F)$的子空间.

(ii) 显然 $0\in W$, $\forall f,g\in W$; $\alpha,\beta\in F$,

法一: 则 $p\mid f$, $p\mid g$ $\Rightarrow$ $p\mid \alpha f+\beta g$

$\Rightarrow \alpha f+\beta g\in W$

$\Rightarrow$ W是 $F[x]$ 的子空间.

法二: ϕ: $F[x]\to F[x]$

$f\mapsto rem(f,p;x)$.

设 $\alpha,\beta\in F$, $f,g\in F[x]$, 由多项式除法可知, $\exists\ u,v\in F[x]$, s.t

$f=uh+\phi_p(f)$ 和 $g=vh+\phi_p(g)$, $deg_x(\phi_p(f))<deg_x(h)$

$deg_x(\phi_p(g))<deg_x(h)$.

$\alpha f+\beta g=(\alpha u+\beta v)h+\alpha\phi_p(f)+\beta\phi_p(g)$

且 $\alpha deg_x(\phi_p(f))+\beta deg_x(\phi_p(g))<deg(h)$.

由余式的唯一性可知, $\phi_p(\alpha f+\beta g)=\alpha\phi_p(f)+\beta\phi_p(g)$

$\Rightarrow\phi$为线性映射.

且 $ker(\phi)=W$

$\Rightarrow$ W是线性空间.

①

2. 证明:

(i) $\forall f, g \in V_1$, 则 $f(x)=f(-x)$, $g(x)=g(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha f(-x)+\beta g(-x)$.

$\Rightarrow \alpha f(x)+\beta g(x) \in V_1$

故 V_1是$Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$的子空间

类似地, V_2是$Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$的子空间.

(ii) $\forall f(x) \in Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

令 $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

易验证 $f(x)=g(x)+h(x)$. 且 $g(x)=g(-x)$, $h(x)=-h(-x)$.

从而 $g(x) \in V_1$, $h(x) \in V_2$

$\Rightarrow Map(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq V_1+V_2$.

由$V_1, V_2 \subseteq Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$为子空间可知, $V_1+V_2 \subseteq Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$\Rightarrow V_1+V_2=Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$\forall f(x) \in V_1 \cap V_2$.

$\Rightarrow f(x)=f(-x)$ 且 $f(-x)=-f(x)$

$\Rightarrow f(x)=-f(x)$.

$\Rightarrow 2f(x)=0$

$\Rightarrow f(x)=0$ (注意到 $char(\mathbb{R})=0$, 故 $2\neq 0$).

$\Rightarrow V_1 \cap V_2=\{0\}$

$\Rightarrow Map(\mathbb{R},\mathbb{R})=V_1 \oplus V_2$.

3. 证明: 设 $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in F$, s.t $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i=0$ (这里$n>2$).

不妨设 $deg(f_1)<deg(f_2)<\cdots<deg(f_n)$.

假设 $\alpha_n \neq 0$, 则 $deg_x(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i)=deg_x(f_n)>0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \neq 0$. $\to \leftarrow$

$\Rightarrow \alpha_n=0$

同理可知 $\alpha_2=\cdots=\alpha_{n-1}=0$

$\Rightarrow \alpha_1 f_1=0$

$\Rightarrow \alpha_1=0$ $(f_1 \neq 0)$.

$\Rightarrow f_1, \cdots, f_n$在$F$上线性无关

(ii)

$$W_2 = \begin{pmatrix} e^{ax}\sin bx & e^{ax}\cos bx \\ ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx & ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx \end{pmatrix} = -be^{2ax}$$

特殊值法：

注意到 $W_2(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = -b$

或者，判断 $-be^{2ax}$ 是否恒等于0。

若恒等于0，则 ~~ 线性相关

否则，线性无关。

① $b \neq 0$，$\Rightarrow e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx$ 线性无关

② $b=0$，此 e^{ax} 线性相关。

4. 证明：$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\forall f, g \in \mathbb{R}[x]$.

$\phi(\alpha f(x) + \beta g(x)) = (\alpha f(x) + \beta g(x))' = (\alpha f(x))' + (\beta g(x))'$

$= \alpha f'(x) + \beta g'(x) = \alpha\phi(f) + \beta\phi(g)$

$\Rightarrow \phi$ 是线性映射

$\psi(\alpha f(x) + \beta g(x)) = x(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha x f(x) + \beta x g(x) = \alpha\psi(f(x)) + \beta\psi(g(x))$

$\Rightarrow \psi$ 是线性映射

$(\phi\circ\psi - \psi\circ\phi)(f) = (\phi\circ\psi)(f) - (\psi\circ\phi)(f) = \phi(\psi(f)) - \psi(\phi(f))$

$= \phi(xf(x)) - \psi(f'(x))$

$= f(x) + xf'(x) - xf'(x) = f(x)$

5. Pf：假设 $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ 是线性相关集，则存在 B_1 中一些向量的线性组合，记为 $\vec{v_1}$，易得 $\vec{v_1} \in \langle B_1 \rangle$，$B_2$ 中一些向量的线性组合，$\vec{v_2} \in \langle B_2 \rangle$ - - - -

$\vec{v_k} \in \langle B_k \rangle$，s.t $\vec{v_1} + \cdots + \vec{v_k} = \vec{0}$　(1)

由于线性相关，故 $\exists i \in \{1, \cdots, k\}$，s.t B_i 中的一些向量的线性组合的系数不为0

从而 $\vec{v_i} \neq \vec{0}$.

这就与零分解唯一相矛盾了。

$\Rightarrow B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ 是线性无关集

6. 由于 V_1 是 V 的真子空间，则 $\exists \vec{v_1} \in V$，$\vec{v_1} \notin V_1$

若 $\vec{v_1} \notin V_2$，则存在性得证

若 $\vec{v_1} \in V_2$，由于 V_2 是 V 的真子空间，则 $\exists \vec{v_2} \notin V_2$，$\vec{v_2} \in V$　↗ 这一部分不需要或可以直接证明

若 $\vec{v_2} \notin V_1$，则存在性得证。若 $\vec{v_2} \in V_1$，下证 $\vec{v_1} + \vec{v_2} \notin V_1$ 且 $\vec{v_1} + \vec{v_2} \notin V_2$

假假 $\vec{v_1} + \vec{v_2} \in V_1$，$\Rightarrow \vec{v_1} \in V_1 \to \Leftarrow$

假设 $\vec{v_1} + \vec{v_2} \in V_2$，$\Rightarrow \vec{v_2} \in V_2 \to \Leftarrow$　$\Rightarrow \vec{v_1} + \vec{v_2} \notin V_1$ 且 $\vec{v_1} + \vec{v_2} \notin V_2$

(iii)（只需域中有无穷多个元素）

假设任何一个域 F上的线性空间可以表示成有限个真子空间的并，即 ∃真子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_k$，使得

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$$

不妨进一步假设 k 是使得上式成立的最小的正整数，则 $k>1$ 且

$$V_i \not\subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_{i-1} \cup V_{i+1} \cup \cdots \cup V_k, \quad i=1,2,\cdots,k$$

取 $\vec{v_1} \in V_1 \setminus V_2$，$\vec{v_2} \in (V_2 \setminus V_1 \cup V_3 \cup \cdots \cup V_k)$，由于 F中含有无穷多个元素，所以

$$\{\lambda \vec{v_1} + \vec{v_2} \mid \lambda \in F \setminus \{0\}\}$$

是一个无穷集。由鸽笼原理可知，存在 $\lambda_1, \lambda_2 \in F \setminus \{0\}$，其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 和存在 $i \in \{1,2,\cdots,k\}$，使得

$$\lambda_1 \vec{v_1} + \vec{v_2},\ \lambda_2 \vec{v_1} + \vec{v_2} \in V_i$$

若 $i=1$，则 $\lambda_1 \vec{v_1} + \vec{v_2} \in V_1 \Rightarrow \vec{v_2} \in V_1 \rightarrow \leftarrow$

若 $i=2$，$\lambda_2 \vec{v_1} + \vec{v_2} \in V_2 \Rightarrow \lambda_2 \vec{v_1} \in V_2 \Rightarrow \vec{v_1} \in V_2$ $(\because \lambda_2 \neq 0)$. $\rightarrow \leftarrow$

若 $i>2$，

$$\lambda_2(\lambda_1 \vec{v_1} + \vec{v_2}) - \lambda_1(\lambda_2 \vec{v_1} + \vec{v_2}) = (\lambda_2 - \lambda_1)\vec{v_2} \in V_i$$

$$\Rightarrow \vec{v_2} \in V_i \rightarrow \leftarrow$$

幻方中的线性代数

定义 任给矩阵 $A \in M_n(Q)$，若A的任一行元素之和，任一列元素皆为某一个固定的数 $\sigma(A)$ 则称A为半幻方（semi-magic square）。设A是半幻方，如果A的主对角线上元素之和以及副对角线上元素之和都等于 $\sigma(A)$，则称 A 是幻方的.（magic square）

例 $A=\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix}15\\15\\15\end{matrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

幻方 半幻方 幻方

$SMag_n(Q) = \{A \in M_n(Q) \mid A为半幻方\}$

$Mag_n(Q) = \{A \in M_n(Q) \mid A为幻方\}$

$SMag_n^0(Q) = \{A \in SMag_n(Q) \mid Tr(A)=0\}$

$Mag_n^0(Q) = \{A \in Mag_n(Q) \mid Tr(A)=0\}$

$SMag_n^*(Q) = \{A \in SMag_n(Q) \mid \sigma(A)=0\}$

~~$Mag_n^*(Q) = \{A \in Mag_n(Q) \mid \sigma(A)=0\}$~~

验证 $SMag_n(Q)$ 是子空间.

设 $A=(a_{ij}) \in M_n(Q)$，则

$$A \in SMag_n(Q) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k},\ i=2,3,\cdots,n$$

和 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}$，$j=1,2,\cdots,n$

$SMag_n(Q)$ 线性同构于 $M_n(Q)$ 的解空间

注：$f: Q^{n^2} \to M_n(Q)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{matrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Q^{n^2} 线性同构于 $M_n(Q)$

令 $S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in Mag_n(\mathbb{Q})$

prop1. ① $SMag_n(\mathbb{Q}) = SMag_n^0(\mathbb{Q}) \oplus \langle S \rangle$

② $SMag_n(\mathbb{Q}) = SMag_n^*(\mathbb{Q}) \oplus \langle S \rangle$

③ $Mag_n(\mathbb{Q}) = Mag_n^0(\mathbb{Q}) \oplus \langle S \rangle$

~~④ $Mag_n(\mathbb{Q}) = Mag_n^*(\mathbb{Q}) \oplus \langle S \rangle$.~~

注意到 $SMag_n^0(\mathbb{Q}) \cap \langle S \rangle = \{0\}$

$SMag_n^*(\mathbb{Q}) \cap \langle S \rangle = \{0\}$

证: $\forall A \in SMag_n(\mathbb{Q})$, 令 $A_0 = A - \frac{Tr(A)}{n} S$,

$\Rightarrow A_0 \in SMag_n(\mathbb{Q}) \quad (A, S \in SMag_n(\mathbb{Q}))$

$Tr(A_0) = Tr(A) - \frac{Tr(A)}{n} Tr(S) = Tr(A) - Tr(A) = 0$

$\Rightarrow A_0 \in SMag_n^0(\mathbb{Q})$

$\Rightarrow SMag_n(\mathbb{Q}) \subseteq SMag_n^0(\mathbb{Q}) + \langle S \rangle$.

$\Rightarrow SMag_n(\mathbb{Q}) = SMag_n^0(\mathbb{Q}) + \langle S \rangle$

$\forall A \in SMag_n^0(\mathbb{Q}) \cap \langle S \rangle$, $\Rightarrow A = a\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{Q}$, 且 $na = 0$, $n \neq 0$

$\Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow SMag_n^0(\mathbb{Q}) \cap \langle S \rangle = \{0\}$.

$\Rightarrow SMag_n(\mathbb{Q}) = SMag_n^0(\mathbb{Q}) \oplus \langle S \rangle$.

$\sigma: M_n(F) \to F$

$A = (a_{ij})_{n \times n} \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_{1j}$

③与④类似证明，自行[illegible]

易验证 σ 为线性映射.

令 $A_* = A - \frac{\sigma(A)}{n} S$

$\sigma(A_*) = \sigma(A) - \frac{\sigma(A)}{n} n = 0$

$\Rightarrow A_* \in SMag_n^*(\mathbb{Q})$.

$\Rightarrow A \in SMag_n^*(\mathbb{Q}) + \langle S \rangle$, $SMag_n^*(\mathbb{Q}) \cap \langle S \rangle = \{0\}$

$\Rightarrow SMag_n(\mathbb{Q}) = SMag_n^*(\mathbb{Q}) \oplus \langle S \rangle$

$E=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}$ ， $D=\begin{pmatrix}0&&1\\&\iddots&\\1&&0\end{pmatrix}$

半幻方 半幻方

$n=2$，看 $SMag_2(Q)$ 与 $Mg_2(Q)$ 的分解

$\forall \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in SMag_2(Q)$， $\overset{一行=一列}{a_{11}+a_{12}=a_{11}+a_{21}} \Rightarrow a_{12}=a_{21}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}a_{11}&a\\a&a_{22}\end{pmatrix}$. $\overset{一行=二行}{a_{11}+a=a+a_{22}} \Rightarrow a_{11}=a_{22}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&a\\a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&\\&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}&a\\a&\end{pmatrix}$

$=b\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}&a-b\\a-b&\end{pmatrix} \Rightarrow SMag_2(Q)=\langle D\rangle\oplus\langle E\rangle$

$\forall \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in Mag_2(Q)$， $\Rightarrow a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}$

$\Rightarrow Mag_2(Q)=\langle S\rangle$.

prop2. $SMag_n(Q)=Mag_n(Q)\oplus\langle E\rangle\oplus\langle D\rangle$，$n\geq 3$.

为证明此，先证两引理.

引理1 设 U 是线性空间，V,W,X,Y 是 U 的子空间，如果 $U=V\oplus W$ 且 $V=X\oplus Y$，则

$U=X\oplus Y\oplus W$

证: $\forall \vec{u}\in U$，则 $\exists!\,\vec{v}\in V$ 和 $\vec{w}\in W$，使得 $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$

对于 $\vec{v}\in V$，则 $\exists!\,\vec{x}\in X$，$\vec{y}\in Y$，使得 $\vec{v}=\vec{x}+\vec{y}$

$\Rightarrow \exists!\,\vec{x}\in X$，$\vec{y}\in Y$ 和 $\vec{w}\in W$，使得 $\vec{u}=\vec{x}+\vec{y}+\vec{w}$、

引理2.

W_1,W_2 为 V 的子空间且 $W_1\cap W_2=\{0\}$. 若 $\dim W_1+\dim W_2\geq \dim V$，则有 $V=W_1\oplus W_2$.

pf: $\dim(W_1\oplus W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)\geq \dim(V)-0=\dim(V)$

由 $W_1\oplus W_2\subseteq V$.

$\Rightarrow V=W_1\oplus W_2$.

pf: 由于 $\langle E\rangle\cap\langle D\rangle=\{0\}$，故 $W=\langle E\rangle\oplus\langle D\rangle$ 且 $\dim(W)=2$

$\forall A=(a_{ij})_{n\times n}\in SMag_n(Q)$，则 $\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{1,k}, & i=2,3,\dots,n.\\ \sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{1,k}, & j=1,2,\dots,n.\end{cases}$ (1).

$\dim(SMag_n(Q))$ 对应方程组(1)的解空间的维数

设 A_1 为(1)的系数矩阵，且经过初等行变换后，变为阶梯形

$\dim(SMag_n(Q))=n^2-\mathrm{rank}(A_1)$

$\forall A \in Mag_n(Q)$ 还需满足两个约束条件，$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}$，和 $\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}$.

故在 A_1 的基础上下面后增加两行元素，成为新矩阵 B

$$rank(B) \le rank(A_1)+2$$

$$\dim(Mag_n(Q)) = n^2 - rank(B) \ge (n^2 - rank(A_1)) - 2 = \dim(SMag_n(Q)) - 2$$

$$\Rightarrow \dim(Mag_n(Q)) + \dim(W)) \ge \dim(SMag_n(Q))$$

下证 $Mag_n(Q) \cap W = \{0\}$

设 $A \in Mag_n(Q) \cap W$，则 $A = \lambda E + uD$，$A = \begin{pmatrix} \lambda & & u \\ & \ddots & \\ u & & \lambda \end{pmatrix}$

$A \in Mag_n(Q)$，则两对角线元素相同，从而 $\begin{cases} n\lambda = nu, & n\text{为偶数}, \\ n\lambda + u = nu + \lambda, & n\text{为奇数} \end{cases}$

$$\Rightarrow \lambda = u$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & & \lambda \\ & \ddots & \\ \lambda & & \lambda \end{pmatrix}$$

假设 $\lambda \ne 0$，由每行元素之和等于对角线元素之和有，$\begin{cases} 2\lambda = n\lambda, & n\text{为偶数} \\ 2\lambda = (n+1)\lambda, & n\text{为奇数} \end{cases}$

$$\Rightarrow n = 1, 2 \quad \to \leftarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

由引理2可知，$SMag_n(Q) = Mag_n(Q) \oplus W$. $\quad W = \langle D \rangle \oplus \langle E \rangle$

再由引理1，$SMag_n(Q) = Mag_n(Q) \oplus \langle D \rangle \oplus \langle E \rangle$.

定理 $\dim(SMag_n(Q)) = n^2 - 2n + 2$

$\dim(Mag_n(Q)) = n^2 - 2n$，$n \ge 2$

证：由命题1可知，$SMag_n(Q) = SMag_n^*(Q) \oplus \langle S \rangle$

$\forall A \in SMag_n^*(Q) \xrightarrow{\sigma(A)=0}$，任意确定其子式 $M \in M_{n-1}(Q)$，由于 $\sigma(A) = 0$，

则 $a_{n,1}, \dots, a_{n,n-1}, a_{1,n}, \dots, a_{n-1,n}, a_{nn}$ 唯一确定

$$A = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1\,n} \end{matrix} \\ \hline a_{n1} \dots a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array}\right)$$

$$a_{i,n} = -\sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$a_{n,j} = -\sum_{k=1}^{n-1} a_{k,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n} = -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_{i,k} = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k}^{n-1} a_{k,j}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j} \quad \Rightarrow a_{nn} \text{存在且唯一.}$$

易知 M 的一组基底为 $\{E_{ij} \mid i,j=1,\ldots,n-1\}$

$\dim(\mathrm{SMag}_n^*(\mathbb{Q})) = (n-1)^2$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{SMag}_n(\mathbb{Q})) = (n-1)^2+1 = n^2-2n+2$

由 prop2，$\dim(\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})) = n^2-2n$，$n \geq 3$

$n=2$，$\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q}) = \langle S \rangle$，$\dim(\mathrm{Mag}_2(\mathbb{Q})) = 1$.