# 第四周习题课

## ——作业讲解和线性映射基本定理

## 一、作业讲解

1. 设 $F$ 是域.

(i) 令 $V=\{A\in M_n(F)\mid tr(A)=0\}$. 验证 $V$ 是 $M_n(F)$ 的子空间.

(ii) 设 $p\in F[x]\setminus\{0\}$. 验证 $W=\{f\in F[x]\mid p|f\}$ 是 $F[x]$ 的子空间.

子空间: 非空 + 加法封闭 + 数乘封闭.

证明. (i) 显然, $0\in V$, 所以 $V$ 非空. 设 $A,B\in V$, $\alpha\in F$, 则有

$$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)=0,\quad tr(\alpha A)=\alpha\, tr(A)=0.$$

所以 $A+B\in V$, $\alpha A\in V$, 则 $V$ 是 $M_n(F)$ 的子空间. □

思考: 计算 $V$ 的一组基及其维数. 以 $n=3$ 为例. 根据 $V$ 的定义.

(不讲)

$$V=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\in M_3(F)\ \middle|\ a_{11}+a_{22}+a_{33}=0\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&-(a_{11}+a_{22})\end{pmatrix}\in M_3(F)\right\},$$

所以 $\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, e_{ij},\ i=1,2,3,\ j=1,2,3,\ i\neq j\right\}$, 其中 $e_{ij}$ 表示 $(i,j)$ 位为 1, 其余元素都为 0 的矩阵.

(ii) 显然, $p\in W$, 所以 $W$ 非空. 设 $f,g\in W$, $\alpha\in F$, 则有

$$p\mid(f+g),\quad p\mid\alpha f.$$

所以 $f+g\in W$, $\alpha f\in W$, 则 $W$ 是 $F[x]$ 的子空间.

□

思考. 计算 $W$ 的一组基(生成 $W$ + 线性无关). 根据 $W$ 的定义,
(不讲)

$$W = \{f \in F[x] \mid p \mid f\}$$
$$= \{f \in F[x] \mid f = ph,\ h \in F[x]\}$$

所以 $\{p, p\cdot x, p\cdot x^2, p\cdot x^3, \cdots\} = \{p\cdot x^i \mid i=0,1,2,\cdots\}$ 是 $W$ 的一组基.

2. 在 $Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 中, 用 $V_1$, $V_2$ 分别表示偶函数和奇函数组成的集合, 证明:

(i) $V_1$, $V_2$ 都是 $Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 的子空间.

(ii) $Map(\mathbb{R},\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$

证明. (i) 直接验证即可.

(不细讲)(ii). 对任意 $f \in Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 有

$$f = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

其中 $\frac{f(x)+f(-x)}{2} \in V_1$, $\frac{f(x)-f(-x)}{2} \in V_2$. 所以 $Map(\mathbb{R},\mathbb{R}) = V_1 + V_2$.

设 $f \in V_1 \cap V_2$. 则 $f(-x) = f(x)$ 且 $f(-x) = -f(x)$, 所以

$$f(x) = -f(x).$$

得到 $2f(x)=0$, 所以 $f(x)=0$, 则 $Map(\mathbb{R},\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$. $\square$

3. (i) 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in F[x] \setminus \{0\}$, 且它们次数两两不同. 证明:
(不细讲) $f_1, \cdots, f_n$ 在 $F$ 上线性无关.

证明. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in F$, 使得

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0.$$

不妨设 $deg(f_1) < deg(f_2) < \cdots < deg(f_n)$, $f_n = a_{i_n} x^{i_n} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_{i_n} \neq 0$.

则 $\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n=\alpha_n a_{in}x^{in}+g=0$，$g\in F[x]$，$\deg g<\deg f_n$. 比较系数

可得 $\alpha_n a_{in}=0$，则 $\alpha_n=0$，于是

$$\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_{n-1}f_{n-1}=0.$$

以此类推 $\alpha_{n-1}=\cdots=\alpha_1=0$，所以 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关.

□

(ii) 设 $e^{ax}\sin bx$，$e^{ax}\cos bx\in Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$. 根据 $a,b$ 的取值讨论这两个函数在 $\mathbb{R}$ 上是否线性相关.

证明. 当 $b=0$ 时，$e^{ax}\sin bx=0$，则 $\alpha\cdot e^{ax}\sin bx+0\cdot e^{ax}\cos bx=0$，$\forall\alpha\in\mathbb{R}$，$\alpha\neq0$.

所以 $e^{ax}\sin bx$ 和 $e^{ax}\cos bx$ 线性相关.

当 $b\neq0$ 时，设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，使得

$$\alpha\cdot e^{ax}\sin bx+\beta\cdot e^{ax}\cos bx=0,$$

即 $\alpha\sin bx+\beta\cos bx=0$ 对于任意 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立. 所以取 $x=0$，

得 $\alpha\cdot\sin0+\beta\cdot\cos0=0$，即 $\frac{\pi}{2}\beta=0$，得 $\beta=0$，所以 $\alpha\sin bx=0$.

取 $x=\frac{1}{b}$，得 $\alpha\sin1=0$，所以 $\alpha=0$. 于是 $\alpha=\beta=0$，即

$$e^{ax}\sin bx,\ e^{ax}\cos bx\ \text{线性无关}.$$

□

4. 直接验证即可.

5. 设 $W=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$，$B_i\subset W_i$ 是线性无关集，$i=1,\cdots,k$. 证明 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k$ 仍是线性无关集（任意有限子集线性无关）.

证明：对任意 $b_{11},b_{12},\cdots,b_{1n_1},b_{21},b_{22},\cdots,b_{2n_2},\cdots,b_{k1},b_{k2},\cdots,b_{kn_k}\in B_1\cup\cdots\cup B_k$.

其中 $b_{ij}\in B_i$，$i=1,\cdots,k$. 设 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1n_1},\cdots,\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kn_k}\in F$，使得

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}b_{ij}=0,$$

则 $\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}b_{ij}\in W_i$，$i=1,\cdots,k$. 记 $\beta_i=\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}b_{ij}$，则

$$\sum_{i=1}^{k}\beta_i=0\quad,\beta_i\in W_i$$

因为 $W=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ 是直和，所以根据讲义定理1.11可得

$$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_k=0,$$

所以 $\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}b_{ij}=0$，$i=1,\cdots,k$. 又因为 $B_i$ 是线性无关组，$b_{ij}\in B_i$，所以 $\alpha_{ij}=0$，$i=1,\cdots,k$，$j=1,\cdots,n_i$. 则 $\{b_{ij}\mid i=1,\cdots,k,j=1,\cdots,n_i\}$ 线性无关，所以 $B_1\cup\cdots\cup B_k$ 是线性无关组.

□

6.（选做）设域 $F$ 的特征为0.

(i) 设 $V_1\subsetneq V$，$V_2\subsetneq V$ 为线性空间 $V$ 的两个真子空间，证明存在 $v\in V$，使得 $v\notin V_1$ 且 $v\notin V_2$.

证明. 设 $v_1\in V_1\setminus V_2$，$v_2\in V_2\setminus V_1$，则断言 $v=v_1+v_2\in V$ 但 $v\notin V_1$ 且 $v\notin V_2$.

若 $v\in V_1$，则 $v_2=v-v_1\in V_1$，矛盾. 若 $v\in V_2$，则 $v_1=v-v_2\in V_2$，矛盾.

所以 $v\notin V_1\cup V_2$.

(ii) 见高老师讲义.

## 二. 商空间与一些同构定理.

定义（商空间）设 $V$ 为 $F$ 上的线性空间，$U$ 为 $V$ 的子空间. 则定义商空间 $V/U=\{x+U\mid x\in V\}$. 其中加法和数乘分别定义为

$$(x+U)+(y+U)=(x+y)+U\quad,x+U,\ y+U\in V/U$$
$$\alpha\cdot(x+U)=\alpha x+U\quad,\alpha\in F,\ x+U\in V/U.$$

注：(1) $x+U=y+U \Leftrightarrow x-y\in U$

(2) 可以验证 $V/U$ 是F上的线性空间.

(3) 画图.

定理.（线性映射基本定理）设 $\phi: V\to W$ 是线性映射，则

$$V/\ker(\phi) \simeq \mathrm{im}(\phi)$$

即存在 $V/\ker(\phi)$ 到 $\mathrm{im}(\phi)$ 的线性映射 $\bar{\Phi}$，且 $\bar{\Phi}$ 为双射.

证明. 因为 $V/\ker(\phi)=\{v+\ker(\phi)\mid v\in V\}$. 定义

$$\bar{\Phi}: V/\ker(\phi) \longrightarrow \mathrm{im}(\phi)=\{\phi(v)\mid v\in V\}.$$

$$v+\ker\phi \longmapsto \phi(v)$$

1. $\bar{\Phi}$ 是良定义的. 设 $v_1+\ker\phi=v_2+\ker\phi$，则 $v_1-v_2\in\ker\phi$，即

$$\phi(v_1-v_2)=0.$$

所以 $\phi(v_1)=\phi(v_2)$，即 $\bar{\Phi}(v_1+\ker\phi)=\bar{\Phi}(v_2+\ker\phi)$.

2. 显然 $\bar{\Phi}$ 是满射.

3. $\bar{\Phi}$ 是单射：设 $v+\ker\phi,\ v'+\ker\phi\in V/\ker\phi$，而且 $\bar{\Phi}(v+\ker\phi)=\bar{\Phi}(v'+\ker\phi)$，即 $\phi(v)=\phi(v')$，所以 $\phi(v-v')=0$. 所以 $v-v'\in\ker\phi$，即

$$v+\ker\phi=v'+\ker\phi.$$

4. $\bar{\Phi}$ 是线性映射：$\forall\alpha,\beta\in F$，$v+\ker\phi,\ v'+\ker\phi\in V/\ker\phi$，有

$$\begin{aligned}
&\bar{\Phi}\left(\alpha(v+\ker\phi)+\beta(v'+\ker\phi)\right)\\
&=\bar{\Phi}((\alpha v+\beta v')+\ker\phi)\\
&=\phi(\alpha v+\beta v')\\
&=\alpha\phi(v)+\beta(\phi(v'))\\
&=\alpha\bar{\Phi}(v+\ker\phi)+\beta\bar{\Phi}(v'+\ker\phi)
\end{aligned}$$

所以 $\bar{\Phi}$ 是线性同构，则 $V/\ker(\phi)\simeq\mathrm{im}(\phi)$. $\square$

推论1 设 $V_1, V_2$ 是 $V$ 的子空间，则

$$V_2/(V_1\cap V_2) \simeq (V_1+V_2)/V_1$$

证明. 设 $\phi: V_2 \longrightarrow (V_1+V_2)/V_1$

$$v_2 \longmapsto v_2 + V_1.$$

可以证明 $\phi$ 是满射，即 $\mathrm{im}\,\phi = (V_1+V_2)/V_1$ 且 $\phi$ 为线性映射，所以根据线性映射基本定理，有

$$V_2/\ker\phi \simeq \mathrm{im}\,\phi = (V_1+V_2)/V_1 .$$

其中 $\ker\phi = \{v_2\in V_2 \mid \phi(v_2) = 0+V_1\}$

$$= \{v_2\in V_2 \mid v_2+V_1 = 0+V_1\} = \{v_2\in V_2 \mid v_2\in V_1\} = V_1\cap V_2 .$$

所以 $V_2/(V_1\cap V_2) \simeq (V_1+V_2)/V_1$ $\square$

推论2. 设 $f: V \longrightarrow W$ 是线性满射，$N$ 为 $W$ 的子空间，则

$$V/f^{-1}(N) \simeq W/N .$$

其中 $f^{-1}(N) = \{v\in V \mid f(v)\in N\}$.

证明. 设 $\phi: V \longrightarrow W/N$

$$v \longmapsto f(v)+N ,$$

则 $\phi$ 为线性满射，所以

$$V/\ker\phi \simeq \mathrm{im}\,\phi, \text{ 即 } V/\ker\phi \simeq W/N .$$

而 $\ker\phi = \{v\in V \mid f(v)+N = 0+N\} = \{v\in V \mid f(v)\in N\} = f^{-1}(N)$. 所以

$$V/f^{-1}(N) \simeq W/N .$$

推论3. 设 $V \supset W \supset U$ 都为线性空间，则

$$\left(V/U\right)\big/\left(W/U\right) \simeq V/W$$

证明. 设 $\phi: V/U \longrightarrow V/W$

$$v+U \longmapsto v+W$$

可以证明 $\phi$ 是良定义的，而且为线性满射，所以

$$\left(V/U\right)\big/\ker(\phi) \simeq \operatorname{im}(\phi) = V/W$$

而 $\ker\phi = \{v+U \in V/U \mid v+W = W\}$

$= \{v+U \in V/U \mid v \in W\}$

$= \{v+U \mid v \in W \cap V\} = \{v+U \mid v \in W\} = W/U$.

所以 $\left(V/U\right)\big/\left(W/U\right) \simeq V/W$.

□

注：用 $V/\ker\phi \simeq \operatorname{im}\phi$ 还可以很容易推出对偶定理和维数公式.