1. Pf: “$\subset$” $\forall x\in f^{-1}(T_1\cup T_2)$. $\exists y\in T_1\cup T_2$, s.t $y=f(x)$

$y\in T_1\cup T_2 \Rightarrow y\in T_1$ 或 $y\in T_2$.

$$\left.\begin{aligned} &① \ y\in T_1 \Rightarrow x\in f^{-1}(T_1) \\ &② \ y\in T_2 \Rightarrow x\in f^{-1}(T_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x\in f^{-1}(T_1)\cup f^{-1}(T_2).$$

$\Rightarrow f^{-1}(T_1\cup T_2)\subset f^{-1}(T_1)\cup f^{-1}(T_2)$.

“$\supset$” $T_1, T_2\subset T_1\cup T_2$.

$\Rightarrow f^{-1}(T_1)\subset f^{-1}(T_1\cup T_2)$, $f^{-1}(T_2)\subset f^{-1}(T_1\cup T_2)$

$\Rightarrow f^{-1}(T_1)\cup f^{-1}(T_2)\subset f^{-1}(T_1\cup T_2)$.

综上，$f^{-1}(T_1\cup T_2)=f^{-1}(T_1)\cup f^{-1}(T_2)$.

$f: X\to Y$

☆ $f^{-1}(T_1) := \{x\in X \mid f(x)\in T_1\}$

（T_1在f下的原像集）

若$f: X\to Y$可逆，则逆映射唯一，记为f^{-1}.

$\exists g: Y\to X$, s.t $\begin{cases} f\circ g=id_Y \\ g\circ f=id_X \end{cases}$.

2. (i) 设映射$f: S\to T$，则$\forall x\in S$，$\exists!\, y\in T$, s.t $y=f(x)$.

对于S中的每个元素而言，映到T中有n个选择，故总共有n^m个映射

(ii) 单射：$m\le n$. 个数：$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=A_n^m$个

双射：$m=n$. 个数：$m!$

(iii) $|S|=3$，$|T|=2$.

设 $S=\{s_1,s_2,s_3\}$，$T=\{t_1,t_2\}$.

若$f: S\to T$为满射，则，t_1, t_2均需S中的元素映到，比时有两种情况.

① S中有2个元素映到t_1，剩下映到t_2，共$\binom{3}{2}$种

② S中有1个元素映到t_1，剩下2个元素映到t_2，共$\binom{3}{1}$种.

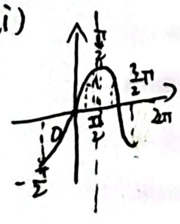
$\Rightarrow \binom{3}{2}+\binom{3}{1}=6$种.

3. 解：$f(x)=\sin x$，$\forall x\in R$.

$y=\sin x$，$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，其反函数为$y=\arcsin x$

$$f: [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto \sin x$$

(i)



考虑一个周期$[-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$内，

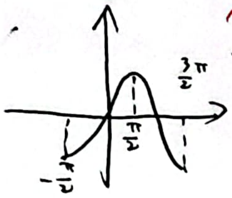
$f^{-1}(x)=\arcsin x$

$\forall y\in[-1,1]$，只有$\arcsin(y)$和$\pi-\arcsin(y)$两个原像，

从而 $f^{-1}(\{y\})=\{\arcsin y+2k\pi,\ \pi-\arcsin(y)+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

$=\{(-1)^k\arcsin y+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

(2).



$\sim_f$ 满足. $x\sim_f x' \Leftrightarrow f(x)=f(x')$

一方面, $\forall x, x'\in R$, $\sin x=\sin x' \Leftrightarrow x'=x+2k\pi$ 或 $x'=\pi-x+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \bar{x}=\{(-1)^n x+n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\}$.

另一方面, $\mathbb{R}/\sim_f$ 可以与区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 一一对应.

从而 $\mathbb{R}/\sim=\{\bar{x}\mid x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\}=\{\{(-1)^n x+n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\}\mid x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\}$.

(3)

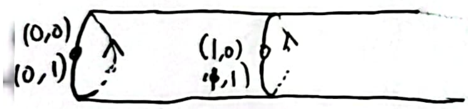
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & {[-1,1]} \\ & \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

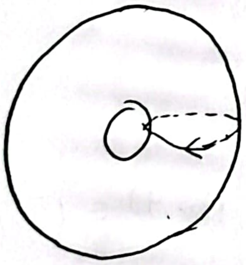
$\pi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
$\quad x\mapsto\bar{x}$

$\bar{f}: \mathbb{R}/\sim\ \to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
$\quad \bar{x}\mapsto\sin x$

Rmk. 此时 $\bar{f}$ 为双射.

4. 令实坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 上的两点 $P(x,y)\sim P(x',y')$ 当且仅当 $x'-x\in\mathbb{Z}$ 且 $y'-y\in\mathbb{Z}$. 证明 $\sim$ 是等价关系, 且商集可以几何地表示为环面上的点集





证明: 自反性: $\forall P(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x-x=0\in\mathbb{Z}$, $y-y=0\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow P(x,y)\sim P(x,y)$

对称性: 若 $P(x,y)\sim P(x',y')$, 则 $x'-x\in\mathbb{Z}$, $y'-y\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x-x'\in\mathbb{Z}$ 且 $y-y'\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow P(x',y')\sim P(x,y)$

传递性: 若 $P(x_1,y_1)\sim P(x_2,y_2)$, $P(x_2,y_2)\sim P(x_3,y_3)$, 由定义有

$x_2-x_1\in\mathbb{Z}$, $y_2-y_1\in\mathbb{Z}$ 且 $x_3-x_2\in\mathbb{Z}$, $y_3-y_2\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x_3-x_1=(x_3-x_2)+(x_2-x_1)\in\mathbb{Z}$,

$y_3-y_1=(y_3-y_2)+(y_2-y_1)\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow P(x_1,y_1)\sim P(x_3,y_3)$

综上, $\sim$ 是等价关系.

~~故划分于 = $\{(a,b)\in[0,1)\times[0,1)\mid \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x-[x]=a, y-[y]=b\}$.~~

定义映射 $f: \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow [0,1)\times[0,1)$.

$$\overline{(x,y)} \longmapsto (x-\lfloor x\rfloor,\ y-\lfloor y\rfloor).$$

($\lfloor x\rfloor$ 为 x 的向下取整，例 $\lfloor 3.4\rfloor=3$，$\lfloor -2.8\rfloor=-3$).

注意到 $x-\lfloor x\rfloor$，$y-\lfloor y\rfloor\in[0,1)$.

下证 f 为良定义的，

若 $\overline{(x,y)}=\overline{(x',y')}$，即 $(x,y)\sim(x',y')$，则 $x-x'\in\mathbb{Z}$，$y-y'\in\mathbb{Z}$.

$$f(\overline{(x,y)})-f(\overline{(x',y')})=(x-\lfloor x\rfloor,\ y-\lfloor y\rfloor)-(x'-\lfloor x'\rfloor,\ y'-\lfloor y'\rfloor)$$

$$=(x-x'-\lfloor x\rfloor+\lfloor x'\rfloor,\ y-y'-\lfloor y\rfloor+\lfloor y'\rfloor)$$

$0\le x-\lfloor x\rfloor<1$，$0\le x'-\lfloor x'\rfloor<1$ $\Rightarrow$ $0\le|x-\lfloor x\rfloor-x'+\lfloor x'\rfloor|<1$.

$x-x'\in\mathbb{Z}$，$\lfloor x'\rfloor-\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $x-x'-\lfloor x\rfloor+\lfloor x'\rfloor\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $x-x'-\lfloor x\rfloor+\lfloor x'\rfloor=0$.

同理可得. $y-y'-\lfloor y\rfloor+\lfloor y'\rfloor=0$.

$\Rightarrow$ $f(\overline{(x,y)})=f(\overline{(x',y')})$，故 f 为良定义的.

下证 f 为双射：

单：$\forall\ \overline{(x_1,y_1)},\overline{(x_2,y_2)}\in\mathbb{R}^2/\sim$，s.t. $f(\overline{(x_1,y_1)})=f(\overline{(x_2,y_2)})$

$\Rightarrow$ $(x_1-\lfloor x_1\rfloor,\ y_1-\lfloor y_1\rfloor)=(x_2-\lfloor x_2\rfloor,\ y_2-\lfloor y_2\rfloor)$

$\Rightarrow$ $x_1-x_2=\lfloor x_1\rfloor-\lfloor x_2\rfloor\in\mathbb{Z}$，$y_1-y_2\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ $\overline{(x_1,y_1)}=\overline{(x_2,y_2)}$

满：$\forall(x,y)\in[0,1)\times[0,1)$，$f(\overline{(x,y)})=(x-\underset{0}{\lfloor x\rfloor},\ y-\underset{0}{\lfloor y\rfloor})=(x,y)$

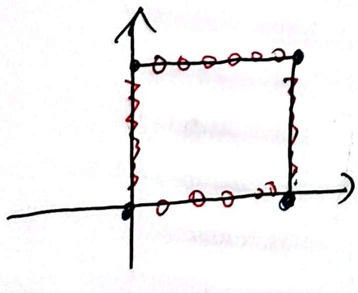
$\Rightarrow$ f 为双射.

下面说明 $[0,1)\times[0,1)$ 可以几何地表示为环面上的点集.

$[0,1]\times[0,1]/\sim\ =\{\overline{(x,y)}\mid 0<x<1,0<y<1\}\cup\{\overline{(x,0)}\mid 0<x<1\}\cup\{\overline{(0,y)}\mid 0<y<1\}\cup\{\overline{(0,0)}\}$.

其中 $\overline{(x,0)}=\{(x,0),(x,1)\}$，$\overline{(0,y)}=\{(0,y),(1,y)\}$.

$\overline{(0,0)}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.



4. 证明2元，3元和4元集分别有 2，5和15个不同的商集

证明：而商集个数 = 划分个数.

法一：2元集$\{a,b\}$：　$\{a,b\}$.　共2种

$2=1+1$　　$\{\{a\},\{b\}\}$

3元集$\{a,b,c\}$.

$3=1+2$　　$\{\{a\},\{b,c\}\}$，$\{\{b\},\{a,c\}\}$，$\{\{c\},\{a,b\}\}$　$\binom{3}{1}=3$.种

$3=1+1+1$　　$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$　　1　　$\Rightarrow 3+1+1=5$种

$3=3$　　$\{\{a,b,c\}\}$，　　1

4元集$\{a,b,c,d\}$.

$4=1+3$　　$\binom{4}{1}=4$种

$4=2+2$　　$\frac{\binom{4}{2}}{2}=\frac{6}{2}=3$种

$4=1+1+1+1$　　1 种　　$\Rightarrow 4+3+1+6+1=15$种.

$4=1+2+1$　　$\binom{4}{2}=6$ 种

$4=4$　　1种

：关于 n元集合有多少个不同的商集的求解方法.

利用递推方式.．设 B_n 为 n元集合含有不同的商集个数

n元集合 $S=\{a_1,\cdots,a_n\}$. 下面按 a_n所属的划分集合元素个数来分类，以 $a_n\in A$，$A\subseteq S$

① $|A|=1$，剩下 n-1 个元素有 B_{n-1}种划分

② $|A|=2$.，这样的 A 有$\binom{n-1}{1}$个，同时剩下 n-2个元素有 B_{n-2} 种划分，故有 $\binom{n-1}{1}B_{n-2}$ 种不同的商集

⋮

ⓘ $|A|=i$，这样的A有$\binom{n-1}{i-1}$个，剩下 n-i 个元素有B_{n-i}种划分，故有$\binom{n-1}{i-1}B_{n-i}$个不同的商集

⋮

(n-1) $|A|=n-1$，这样的A有$\binom{n-1}{n-2}$个，剩下元素只有B_1个划分，故有$\binom{n-1}{n-2}B_1$个不同的商集

ⓝ $|A|=n$.，只有一个商集

$$\Rightarrow B_n=B_{n-1}+\binom{n-1}{1}B_{n-2}+\cdots+\binom{n-1}{n-2}B_1+1.$$

↓.

Bell数.　　$B_n=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{k-i}\,i^n}{k!}$

5. 证明：自反性：$\forall a\in\mathbb{Z}^+$, $a|a \Rightarrow a\preceq a$.

反对称性：$\forall a,b\in\mathbb{Z}^+$, $a\preceq b$, $b\preceq a$, $\Rightarrow a|b$ 且 $b|a$.

$\Rightarrow \exists m_1, m_2 \in\mathbb{Z}^+$, s.t $b=m_1 a$, $a=m_2 b$.

$\Rightarrow b=m_1 m_2 b$.

$\Rightarrow m_1 m_2=1$

$\Rightarrow m_1=m_2=1$

$\Rightarrow a=b$.

传递性：$\forall a,b,c\in\mathbb{Z}^+$，有 $a\preceq b$ 和 $b\preceq c$.

$\Rightarrow a|b$, $b|c$.

$\Rightarrow \exists m_1, m_2\in\mathbb{Z}^+$, s.t $b=m_1 a$, $c=m_2 b$.

$\Rightarrow c=m_2 m_1 a$

$\Rightarrow a|c$

$\Rightarrow a\preceq c$

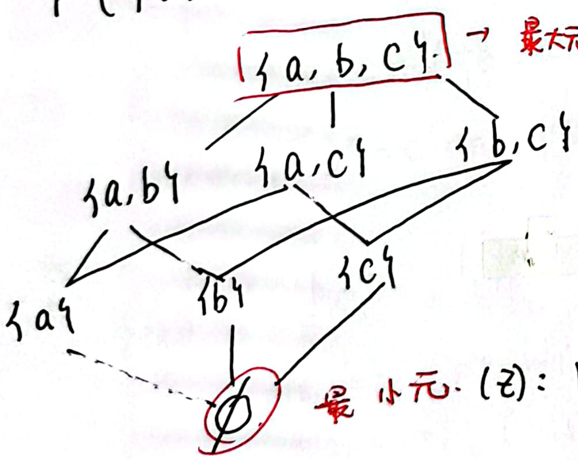
$\Rightarrow$ $|$ 是偏序.

但 $|$ 不是全序，比如：3与4之间不存在整除关系，$3\nmid 4$ 和 $4\nmid 3$.

($\forall a,b\in\mathbb{Z}^+$，有 $a\preceq b$ 或 $b\preceq a$).

例 偏序图解

$P(\{a,b,c\})$.



最大元(z)：$\forall x\in P(\{a,b,c\})$, $x\preceq z$

最小元(z)：$\forall x\in P(\{a,b,c\})$, $z\preceq x$.

满射的一个充要条件：设映射 $f: X \to Y$，f 为满射 $\iff \forall V \subset Y$，满足 $f(f^{-1}(V)) = V$.

Pf: "$\Rightarrow$" "$\subset$"，$\forall y \in f(f^{-1}(V))$，$\exists x \in f^{-1}(V)$, s.t $y = f(x)$

$x \in f^{-1}(V) \Rightarrow \exists y' \in V$, s.t $f(x) = y'$

f 为映射 $\Rightarrow y = f(x) = y' \in V$.

$\Rightarrow f(f^{-1}(V)) \subset V$.

"$\supset$" $\forall y \in V$，f 满 $\Rightarrow \exists x \in V$，s.t $f(x) = y \in V$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(V)$

$\Rightarrow y \in f(f^{-1}(V))$.

$\Rightarrow V \subseteq f(f^{-1}(V))$.

$\Rightarrow V = f(f^{-1}(V))$.

"$\Leftarrow$" 假设 f 不是满射，则 $\exists y \in Y$, s.t $\forall x \in X$，$f(x) \neq y$，即 $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$

令 $V = \{y\}$，则 $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$. $\to \Leftarrow$.

$\Rightarrow f$ 是满射.

置换.

令 $T = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Def: 从 T 到 T 的双射 σ 称为置换，置换全体构成的集合记为 S_n，$|S_n| = n!$

记. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$. 这里 $\sigma(k) = i_k$，$k = 1, 2, \cdots, n$.

置换乘积：$\forall \sigma, \tau \in S_n$，$\sigma \circ \tau := \sigma\tau$，一般 $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

阶：设 k 是使得 $\sigma^k = e$ 成立的最小正整数，k 称为 σ 的阶，记为 $\mathrm{ord}(\sigma)$.

prop: $\forall m \in \mathbb{Z}$，$\sigma^m = e \iff \mathrm{ord}(\sigma) \mid m$.

循环分解.

Def (循环) $\sigma \in S_n$，$\exists i_1, i_2, \cdots, i_k \in T$ 两两不同 s.t

$\sigma(i_1) = i_2$，$\sigma(i_2) = i_3$，$\cdots$，$\sigma(i_{k-1}) = i_k$，$\sigma(i_k) = i_1$

且对 $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$，$\sigma(j) = j$

记 $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_k)$，$k$ 为 σ 的长度.

prop ① $(i_1 i_2 \cdots i_k)^{-1} = (i_k i_{k-1} \cdots i_2 i_1)$.

② $\mathrm{ord}(\sigma) = k$.

设 $\sigma\in S_n$，定义 $M_\sigma=\{i\in\{1,\cdots,n\}\mid\sigma(i)\neq i\}$.

eg: $M_e=\varnothing$，$M_{(i_1i_2\cdots i_k)}=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$.

def. 1 设 $\sigma,\tau\in S_n$，若 $M_\sigma\cap M_\tau=\varnothing$，则称 σ 和 τ 是两个不相交的置换

prop. ① $\sigma,\tau\in S_n$ 不相交，则 $\sigma\tau=\tau\sigma$

② $n>1$，$\sigma\in S_n\setminus\{e\}$，则存在不相交的循环（长度大于1）$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s$，s.t. $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s$.
不计顺序前提下，表示法唯一.

$\mathrm{ord}(\sigma)=\mathrm{lcm}(\mathrm{ord}(\sigma_1),\cdots,\mathrm{ord}(\sigma_s))$，$\sigma^{-1}=\sigma_s^{-1}\cdots\sigma_1^{-1}$

奇偶置换

对换：长度等于2的循环

命题：设 $\sigma\in S_n$，设 $\sigma=\lambda_1\cdots\lambda_k=\mu_1\cdots\mu_m$ 其中 λ_i,μ_i 是对换，则 k 和 m 的奇偶性相同

定义：设 $\sigma\in S_n$，若 σ 可以写成奇数个对换之积，则称 σ 是奇置换，否则为偶置换.

置换 σ 的符号：ε_σ，$\varepsilon_\sigma=\begin{cases}1, & \sigma\text{为偶置换}\\ -1, & \sigma\text{为奇置换}\end{cases}$

prop. ① $\varepsilon_{\sigma_1\cdots\sigma_k}=\varepsilon_{\sigma_1}\cdots\varepsilon_{\sigma_k}$，$\forall\,\sigma_1,\cdots,\sigma_k\in S_n$.

② σ 的循环分解：$\sigma=\tau_1\cdots\tau_k$，$\varepsilon_\sigma=(-1)^{\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{ord}(\tau_i)-1)}$.

eg 1: 设 $\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11\\5&4&6&7&2&9&1&3&8&11&10\end{pmatrix}$，求 π 的互不相交的循环分解，阶数和置换符号.

解：$\pi=\underbrace{(1\,5\,2\,4\,7)}_{\tau_1}\underbrace{(3\,6\,9\,8)}_{\tau_2}\underbrace{(10\ 11)}_{\tau_3}$

$\mathrm{ord}(\tau_1)=5$，$\mathrm{ord}(\tau_2)=4$，$\mathrm{ord}(\tau_3)=2$

$\mathrm{ord}(\pi)=\mathrm{lcm}(5,4,2)=20$

$\varepsilon_\pi=(-1)^{(4+3+1)}=1$.

eg2：设 $\tau=(327)(16)$，$\sigma=(134)(57)$

求 $\sigma\tau\sigma^{-1}=?$

解：prop：$\sigma(i_1i_2\cdots i_k)\sigma^{-1}=(\sigma(i_1),\cdots,\sigma(i_k))$

$\sigma(i_1i_2\cdots i_k)(j_1j_2\cdots j_s)\sigma^{-1}=\sigma(i_1i_2\cdots i_k)\sigma^{-1}\sigma(j_1j_2\cdots j_s)\sigma^{-1}$

$=(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\cdots,\sigma(i_k))(\sigma(j_1),\sigma(j_2)\cdots\sigma(j_s))$.

$\cdots$

$\Rightarrow\sigma\tau\sigma^{-1}=\sigma(327)\sigma^{-1}\sigma(16)\sigma^{-1}$

$=(\sigma(3),\sigma(2),\sigma(7))(\sigma(1),\sigma(6))=(425)(36)$