第三周习题课

1. 设映射 $f: X \to Y$. T_1, T_2 是 Y 的两个子集, 证明:

(i) $f^{-1}(T_1 \cup T_2) = f^{-1}(T_1) \cup f^{-1}(T_2)$

(ii) $f^{-1}(T_1 \cap T_2) = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$

复习: 设 $T \subset Y$, 则

$$f^{-1}(T) = \{x \in X \mid f(x) \in T\}.$$

这里并不是说 f 是可逆的.

证: (i) 设 $x \in f^{-1}(T_1 \cup T_2)$, 则 $f(x) \in T_1 \cup T_2$, 即 $f(x) \in T_1$ 或 $f(x) \in T_2$

所以 $x \in f^{-1}(T_1)$ 或 $x \in f^{-1}(T_1)$, 即

$$x \in f^{-1}(T_1) \cup f^{-1}(T_2).$$

反之, 设 $x \in f^{-1}(T_1) \cup f^{-1}(T_2)$, 则 $x \in f^{-1}(T_1)$ 或 $x \in f^{-1}(T_2)$,

所以 $f(x) \in T_1$ 或 $f(x) \in T_2$, 则 $f(x) \in T_1 \cup T_2$

$$x \in f^{-1}(T_1 \cup T_2).$$

综上所述 $f^{-1}(T_1) \cup f^{-1}(T_2) = f^{-1}(T_1 \cup T_2)$.

(ii) 设 $x \in f^{-1}(T_1 \cap T_2)$, 则 $f(x) \in T_1 \cap T_2$, 即 $f(x) \in T_1$ 且 $f(x) \in T_2$

即 $x \in f^{-1}(T_1)$ 且 $x \in f^{-1}(T_2)$, 所以

$$x \in f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2).$$

反之, 设 $x \in f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$, 则 $x \in f^{-1}(T_1)$ 且 $x \in f^{-1}(T_2)$, 所以

$f(x) \in T_1$ 且 $f(x) \in T_2$, 即 $f(x) \in T_1 \cap T_2$, 所以

$$x \in f^{-1}(T_1 \cap T_2)$$

综上所述 $f^{-1}(T_1 \cap T_2) = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$.

$\square$

2. (i) n^m.

(ii) 单射：$m \le n$.　个数：A_n^m个

双射：$m = n$　个数：$m!$

(iii) 6种.

复习：等价关系与商集.

定义1（等价关系）设S是非空集合，$\sim$是S上的二元关系，如果

(i) 对任意$x \in S$，$x \sim x$（自反性）.

(ii) 设$x, y \in S$且$x \sim y$，则$y \sim x$（对称性）

(iii) 设$x, y, z \in S$，$x \sim y$且$y \sim z$，则$x \sim z$（传递性）.

例1　设$T = \{\mathbb{R}^2$中所有三角形$\}$，则三角形全等和相似都是T上的等价关系.

例2. 设$a, b \in \mathbb{Z}$，n是大于1的正整数，定义

$$a \equiv_n b \iff n \mid a - b,$$

则$\equiv_n$是$\mathbb{Z}$上的等价关系.

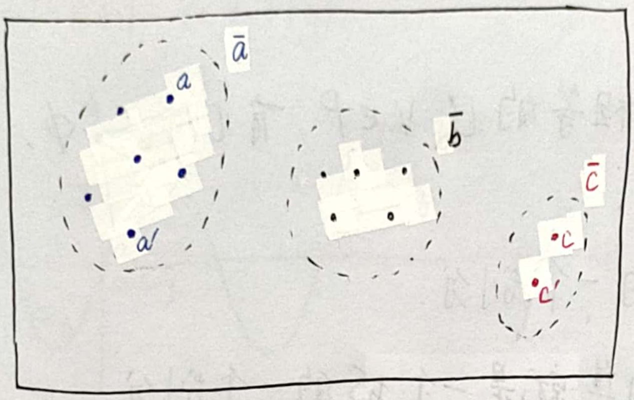
例3　同乡关系是等价关系.

例4　“$>$”关系不是等价关系，父子关系不是等价关系

根据等价关系可以对集合中的元素进行分类：

$S=\{$图中的点$\}$

$\sim$：两个点有关系当且两个点的颜色相同



$\bar{c}=\{c,c'\}$

$$S/_{\sim}=\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}.$$

等价类：设 $\sim$ 是 S 上的等价关系，$x\in S$. 定义 x 的等价类是

$$\bar{x}=\{y\in S \mid x\sim y\}$$

此外，$\bar{x}$ 中任何一个元素都可以充当该等价类的一个代表元. ←注1保证

$\bar{a}\neq\phi$

注1：$\bar{a}=\bar{a'} \Leftrightarrow a\sim a'$

$\bar{a}\neq\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\cap\bar{b}=\phi$

注2：等价类本身是一个集合.

自反性，

对称性和传递性保证了注1成立.

举 > 的反例说明定义的必要性

商集：关于 $\sim$ 的所有等价类构成的集合称为 S 关于 $\sim$ 的商集. 记为 $S/_{\sim}$. 映射

$$\begin{aligned}\pi: S &\longrightarrow S/_{\sim}\\ x &\longmapsto \bar{x}\end{aligned}$$

称为关于 $\sim$ 的商映射或自然投射.

注：1. 商集是集合的集合，商集中的元素是集合.

2. 商集看作是根据等价关系对集合中的元素进行分类，每一个类就是一个元素.

划分：设 S 是非空集，P 是 S 中一些非空子集组成的集合.

如果

(i) 对任意不相等的 $U, V \in P$，有 $U \cap V = \phi$，

(ii) $S = \bigcup_{U \in P} U$，

则称 P 是 S 的一个划分.

注. 上面定义的商集 $S/\sim$ 就是 S 的一个划分.

命题：设 S 是一个非空集，则 S 上的等价关系和 S 上的划分存在一一对应，具体对应法则如下：

$$\{S\text{中的等价关系}\} \longrightarrow \{S\text{中的划分}\}$$
$$\sim \quad \longmapsto \quad S/\sim$$

$$\{S\text{中的划分}\} \longrightarrow \{S\text{中的等价关系}\}$$
$$P \quad \longmapsto \quad \sim_P : \ a, b \in S,\ a \sim_P b \Leftrightarrow \exists U \in P,\ a, b \in U.$$

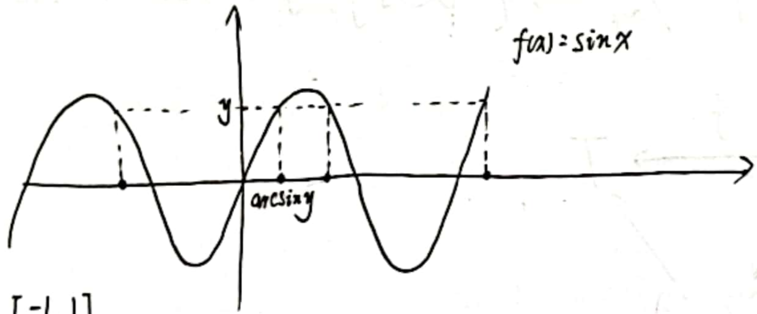
可以证明 $S/\sim_P = P$ 且 $\sim_{S/\sim} = \sim$.

（两个等价关系 $\sim = \sim'$ 的意思是 $\forall a, b \in S,\ a \sim b \Leftrightarrow a \sim' b$）

3. 设 $f(x)=\sin x$，且定义域为 $\mathbb{R}$.

(i) 任给 $y\in[-1,1]$，求 $f^{-1}(\{y\})$.

解:



$\forall y\in[-1,1]$,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{y\}) &= \{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=y\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid \sin x = y\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid x=\arcsin y+2k\pi \text{ 或 } \pi-\arcsin y+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

(ii) 求由 f 诱导的等价关系 $\sim_f$ 的商集. ←(一些等价类构成的集合)

$\forall x\in\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \{x'\in\mathbb{R} \mid x'\sim_f x\} \\ &= \{x'\in\mathbb{R} \mid \sin x=\sin x'\} \\ &= \{x'\in\mathbb{R} \mid x'=x+2k\pi \text{ 或 } \pi-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\sim_f &= \{\bar{x} \mid x\in\mathbb{R}\} \\ &= \{\bar{x} \mid x\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]\}. \end{aligned}$$

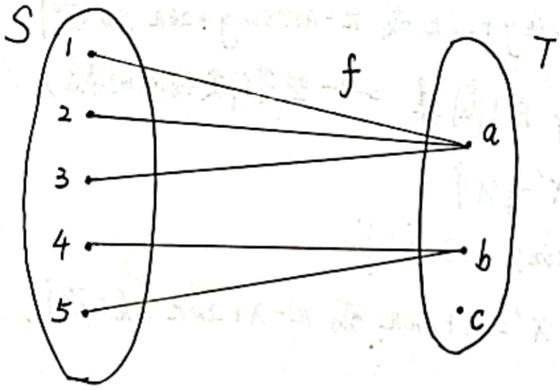
(iii) 商映射:
$$\begin{aligned} \pi:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}/\sim_f \\ x &\longrightarrow \bar{x}=\{x'\in\mathbb{R} \mid x'=x+2k\pi \text{ 或 } \pi-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

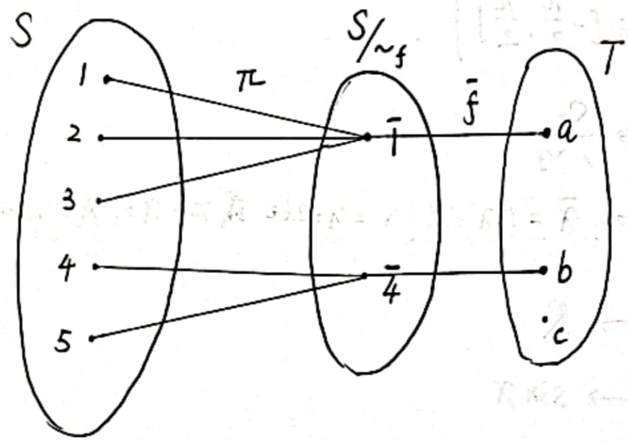
$$\begin{aligned} \bar{f}:\ \mathbb{R}/\sim_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \bar{x} &\longmapsto \sin x \end{aligned}$$

映射分解定理：

定理5.18　设$f: S\to T$是映射，π是关于$\sim_f$的商映射，则存在唯一的映射$\bar{f}: S/_{\sim_f}\to T$使得$f=\bar{f}\circ\pi$，且该映射是单射.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T \\ & S/_{\sim_f} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$





4.1 实坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 上的两点 $P(x,y)\sim P(x',y')$ 当且仅当 $x'-x\in\mathbb{Z}$ 且 $y'-y\in\mathbb{Z}$，证明 $\sim$ 是等价关系，且商集可以几何地表示为环面上的点集。

证明：·（自反性）对任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，有 $x-x=0\in\mathbb{Z}$；$y-y=0\in\mathbb{Z}$，则

$(x,y)\sim(x,y)$.

·（对称性）设 $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$，且 $(x,y)\sim(x',y')$，则

$x'-x\in\mathbb{Z}$，$y'-y\in\mathbb{Z}$，所以 $x-x'=-(x'-x)\in\mathbb{Z}$，

$y-y'=-(y'-y)\in\mathbb{Z}$，所以

$$(x',y')\sim(x,y)$$

·（传递性）设 $(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}$，且 $(x,y)\sim(x',y')$，

$(x',y')\sim(x'',y'')$，则

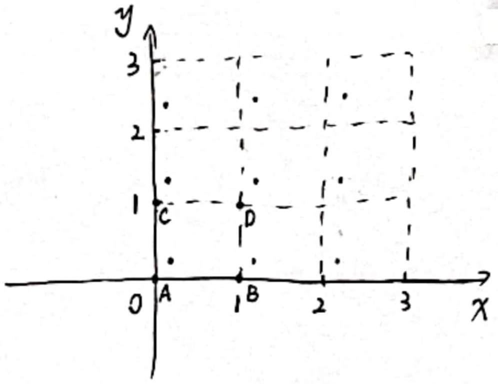
$$x'-x\in\mathbb{Z},\quad x''-x'\in\mathbb{Z},$$
$$y'-y\in\mathbb{Z},\quad y''-y'\in\mathbb{Z},$$

所以 $x''-x=(x'-x)+(x''-x')\in\mathbb{Z}$，

$y''-y=(y'-y)+(y''-y')\in\mathbb{Z}$，

则 $(x,y)\sim(x'',y'')$.

求 $\mathbb{R}^2/\sim$：$\mathbb{R}^2/\sim=\{\overline{(x,y)}\mid(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$，其中 $\overline{(x,y)}=\{(x+k_1,y+k_2)\mid k_1,k_2\in\mathbb{Z}\}$



而且，根据 $\sim$ 的定义可知

$$\mathbb{R}^2/\sim=\{\overline{(x,y)}\mid(x,y)\in[0,1]\times[0,1]\}.$$

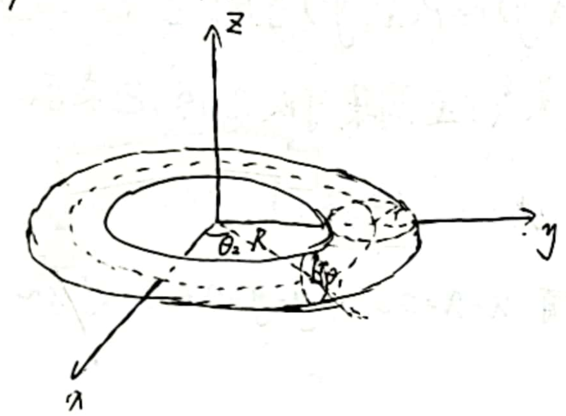
不严谨说法：

又因为 $\overline{(x,0)}=\overline{(x,1)}$，$0\le x\le1$

$\overline{(0,y)}=\overline{(1,y)}$，$0\le y\le1$

所以相当于把AB边和CD边粘连，再把AC边和BD边粘连，所以得到一个环面.

严谨说法:



环面可以参数式地定义为

$$x(\theta_1,\theta_2)=(R+r\cos\theta_1)\cos\theta_2$$
$$y(\theta_1,\theta_2)=(R+r\cos\theta_1)\cos\theta_2$$
$$z(\theta_1,\theta_2)=r\sin\theta_2$$

其中 $\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi]$，$R$是管子的中心到原点距离，$r$是圆管的半径. 定义

$$\varphi:\ \mathbb{R}^2/\sim\ =\{\overline{(x,y)}\mid (x,y)\in[0,1)\times[0,1)\}\to T$$
$$(x,y)\longmapsto\big((R+r\cos 2\pi x)\cos 2\pi y,\ (R+r\cos 2\pi x)\cos 2\pi y,\ r\sin 2\pi y\big)$$

则φ是良定义的，φ为双射且连续.

4.2 证明2元，3元和4元集分别有2.5和15个不同的商集(划分，等价关系)

证明：以4元集为例：

先对4进行分析：

$4=1+1+1+1$ 1种

$4=1+1+2$ $\frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{A_2^2}=6$种

$4=1+3$ 4种

$4=2+2$ $\frac{C_4^2}{A_2^2}=3$种

$4=4$ 1种

$1+6+4+3+1=15$种.

5. 讲一下哈斯图

对于偏序集合$(S,\leq)$，把S的每个元素表示为平面上的顶点，只要y覆盖x(就是说$x<y$并且没有z使得$x<z<y$)，则绘制x到y向上的线段或弧线.

比如$S=\{1,2,3,6,7\}$，$\leq$为整除关系，即$a\leq b \Leftrightarrow a|b$