1.解:

(i). $A=(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=2$. ,故 $\dim(\langle v_1,v_2,v_3\rangle)=2$

$\dim(\mathbb{Q}^3/V)=3-\dim(V)=3-2=1$

而 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 可将其扩充成 $\mathbb{Q}^3$ 的一组基为 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+V$ 是 $\mathbb{Q}^3/V$ 的一组基

→ 维数公式 设 U 是 V 的子空间

$\dim(V/U)=\dim(V)-\dim U$

(ii). 设 $\exists\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Q}$, s.t $\vec{w}=\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}$

$\Rightarrow\begin{cases}3=\alpha_1+\alpha_2\\2=2\alpha_1+\alpha_2\\2=\alpha_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=1\\\alpha_2=2\end{cases}$

$\Rightarrow \vec{w}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$.

$\Rightarrow \vec{w}=(\vec{v_1},\vec{v_2})\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

2. $\forall A\in U$, 则 $A^t=-A$

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. $-\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

$a_{ij}=-a_{ji},\ \forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$

① $\operatorname{char}(F)\neq 2$, 则 $a_{ij}=-a_{ji}$, $i\neq j$, $a_{ii}=0$.

$\Rightarrow \{E_{ij}-E_{ji}\mid i\neq j,\ 1\le i<j\le n\}$ 为 U 的一组基, $\Rightarrow \dim_F(U)=\frac{n^2-n}{2}$

② $\operatorname{char}(F)=2$, $1=-1$ $\Rightarrow a_{ij}=a_{ji},\ \forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$

$\Rightarrow \{E_{ij}+E_{ji}\mid i\neq j,\ 1\le i<j\le n\}\cup\{E_{ii}\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为 U 的一组基

$\Rightarrow \dim_F(U)=\frac{n^2+n}{2}$

3. $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $u(x),v(x)\in P_n$

$\phi(\alpha u(x)+\beta v(x))=x(\alpha u+\beta v)'-(\alpha u+\beta v)=x(\alpha u'+\beta v')-\alpha u-\beta v$

$=\alpha(xu'-u)+\beta(xv'-v)$

$=\alpha\phi(u(x))+\beta(\phi(v(x)))$

$\Rightarrow \phi$ 是线性映射.

$\forall\, u(x) \in P_n$，$\phi(u(x)) = 0$

$\Rightarrow xu' - u = 0$ ，注意到 $\varphi(1) = -1 \neq 0, \varphi(x) = 0$

设 $u(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$，$a_m \neq 0$，$1 \le m \le n-1$

$\Rightarrow x((n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1) - (a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) = 0$

$\Rightarrow (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + (n-2)a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_0 = 0$

$\Rightarrow (m-1)a_m = 0$，$a_m \neq 0$，$a_0 = 0$ …… 0

$\Rightarrow m = 1$ ……

且 $\phi(a_1 x) = a_1 x - a_1 x = 0$

$\Rightarrow \ker(\phi) = \langle x \rangle$，即 x 是 $\ker(\phi)$ 的一组基.

4. 验证 U 是 $\mathbb{C}$ 的子空间，$0 \in U$，

$\forall\, a_1 + b_1\sqrt{2},\ a_2 + b_2\sqrt{2} \in U$，$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

$\alpha(a_1 + b_1\sqrt{2}) + \beta(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)\sqrt{2}$

由有理数域对加减乘除封闭可得，$\alpha a_1 + \beta a_2 \in \mathbb{Q}$，$\alpha b_1 + \beta b_2 \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \alpha(a_1 + b_1\sqrt{2}) + \beta(a_2 + b_2\sqrt{2}) \in U$

$\Rightarrow U$ 是 $\mathbb{C}$ 的子空间.

同理 V 是 $\mathbb{C}$ 的子空间

下证 $1, \sqrt{2}$ 线性无关

假设线性相关，则 $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$ 不全为0，s.t. $c_1 + c_2\sqrt{2} = 0$，显然 $c_1, c_2 \neq 0$.

$\Rightarrow \sqrt{2} = -\dfrac{c_1'}{c_2'}$，$c_1', c_2' \in \mathbb{Z}$ 或

$\Rightarrow \sqrt{2}$ 是有理数 $\rightarrow\leftarrow$

$c_1'^2 = 2c_2'^2$

对 $c_1'^2$ 进行质因子分解，总共有偶数个质因子，而 $2c_2'^2$ 总共有奇数个质因子. $\rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow 1, \sqrt{2}$ 线性无关.

$\Rightarrow \{1, \sqrt{2}\}$ 为 U 的一组基，

同理 $\{1, \sqrt{-1}\}$ 为 V 的一组基.

下面来看 $U \cap V$，对 $\forall\, x \in U \cap V$，

则 $\exists\, a, b, c, d \in \mathbb{Q}$，s.t. $x = a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{-1}$

$\Rightarrow \underbrace{a - c + b\sqrt{2}}_{\text{实部}} + d\sqrt{-1} = 0$ （把它看做一个复数）

$\Rightarrow \begin{cases} a - c + b\sqrt{2} = 0 \\ d = 0 \end{cases}$

由 $1, \sqrt{2}$ 线性无关（$\mathbb{Q}$ 上）$\Rightarrow a = c$，$b = 0$.

$\Rightarrow U \cap V = \mathbb{Q}$. $\Rightarrow \dim(U \cap V) = 1$.

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}}(U+V)$

$= \dim_{\mathbb{Q}}(U) + \dim_{\mathbb{Q}}(V) - \dim_{\mathbb{Q}}(U \cap V)$

$= 2 + 2 - 1 = 3$.

5. 证明：设 W 的一组基为 $\{\vec{w_1},\cdots,\vec{w_d}\}$，由基扩充定理，将其扩充为 V 的一组基为 $\{\vec{w_1},\cdots,\vec{w_{d+1}},\cdots,\vec{w_n}\}$

定义 ϕ： $V\to V$

$\vec{w_i}\mapsto\vec{0}$， $i=1,\cdots,d$

$\vec{w_j}\mapsto w_j$， $j=d+1,\cdots,n$

线性映射基本定理(III)

设 V 的一组基 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n}$

W 是 F 上的线性空间且 $\vec{w_1},\cdots,\vec{w_n}\in W$

则 $\exists!\ \phi: V\to W$, s.t

$\phi(\vec{v_i})=\vec{w_i}$， $i=1,2,\cdots,n$.

$\Rightarrow\phi(\vec{w_i})=\vec{0}$， $i=1,2,\cdots,d$.

$\Rightarrow\phi(W)=\{\vec{0}\}$

$\forall\ \vec{v}=\alpha_1\vec{w_1}+\cdots+\alpha_{d+1}\vec{w_{d+1}}+\cdots+\alpha_n\vec{w_n}\in\ker(\phi)$

则 $\phi(\vec{v})=\alpha_{d+1}\vec{w_{d+1}}+\cdots+\alpha_n\vec{w_n}=\vec{0}$

由 $\vec{w_{d+1}},\cdots,\vec{w_n}$ 线性无关，可得 $\alpha_{d+1}=\cdots=\alpha_n=0$.

$\Rightarrow\vec{v}\in\langle\vec{w_1},\cdots,\vec{w_d}\rangle$

$\Rightarrow\ker(\phi)=W$.

6.(1) 对 $\forall\vec{x}\in V$，由直和分解的唯一性可知，$\exists!\ x_i\in V_i$，$i=1,2,\cdots,k$，使得

$\vec{x}=\vec{x_1}+\vec{x_2}+\cdots+\vec{x_k}$

$\Rightarrow\pi_i$ 是良定义的

$\forall\alpha,\beta\in F$，$\vec{x},\vec{y}\in V$，则 $\exists!\ \vec{x_i},\vec{y_i}\in V_i$, s.t

$\vec{x}=\vec{x_1}+\cdots+\vec{x_k}$， $\vec{y}=\vec{y_1}+\cdots+\vec{y_k}$

$\Rightarrow\sigma_i(\vec{x})=\vec{x_i}$， $\sigma_i(\vec{y})=\vec{y_i}$

$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\alpha(\vec{x_1}+\cdots+\vec{x_k})+\beta(\vec{y_1}+\cdots+\vec{y_k})=\alpha\vec{x_1}+\beta\vec{y_1}+\cdots+(\alpha\vec{x_i}+\beta\vec{y_i})+\cdots+(\alpha\vec{x_k}+\beta\vec{y_k})$

由 V_i 为 V 的子空间，有 $\alpha\vec{x_i}+\beta\vec{y_i}\in V_i$

$\Rightarrow\sigma_i(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha\vec{x_i}+\beta\vec{y_i}=\alpha\sigma_i(\vec{x})+\beta\sigma_i(\vec{y})$

$\Rightarrow\sigma_i$ 都是良定义的线性映射.

(ii) Pf: $\forall\vec{x}\in V$， $\sigma_i(\vec{x})=\vec{x_i}\in V_i$

$\vec{x}=\vec{x_1}+\cdots+\vec{x_n}$

(a) 幂等性

$\vec{x_i}=0+\cdots\ 0+\underset{V_i}{\vec{x_i}}+\cdots\ 0$ $\Rightarrow\sigma_i(\vec{x_i})=\vec{x_i}$

$\sigma_i^2(\vec{x})=\pi_i(\pi_i(\vec{x}))=\pi_i(\vec{x_i})=\vec{x_i}=\sigma_i(\vec{x})$

$\Rightarrow\sigma_i^2=\sigma_i$

(b) 正交性

$\forall i\neq j$ $\sigma_j(\vec{x})=\vec{x_j}$， $\vec{x_j}=\vec{0}+\cdots+\underset{i}{\vec{0}}+\cdots+\underset{j}{\vec{x_j}}+\cdots\vec{0}$

$\Rightarrow\sigma_i(\vec{x_j})=\vec{0}$

$\Rightarrow\sigma_i\circ\sigma_j(\vec{x})=\sigma_i(\vec{x_j})=\vec{0}$ $=\sigma_i\circ\sigma_j=0$

(c) 完全性

$(\sigma_1+\cdots+\sigma_k)(\vec{x})$

$=\sigma_1(\vec{x})+\cdots+\sigma_k(\vec{x})$

$=\vec{x_1}+\cdots+\vec{x_k}=\vec{x}$

$\Rightarrow\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_k=\varepsilon$

延伸…

设 $\pi_1,\dots,\pi_k\in Hom(V,V)$ 满足.

(a) $\forall i\in\{1,2,\dots,k\},\ \pi_i^2=\pi_i$

(b) $\forall i,j\in\{1,2,\dots,k\},\ i\neq j,\ \pi_i\pi_j=\mathcal{O}$ 完全正交等方组

(c) $\pi_1+\dots+\pi_k=\mathcal{E}$

则 (i) $V=im(\pi_1)\oplus\dots\oplus im(\pi_k)$

(ii) 设 $p_i:V\to V$ 是关于上述直和从 V 到 $im(\pi_i)$ 的投影，则 $p_i=\pi_i$，$i=1,2,\dots,k$.

$\forall \vec{x}\in V,\ \vec{x}=\mathcal{E}\vec{x}=(\pi_1+\dots+\pi_k)\vec{x}=\pi_1\vec{x}+\dots+\pi_k\vec{x}\in im(\pi_1)+im(\pi_2)+\dots+im(\pi_k)$

$\Rightarrow V\subseteq im(\pi_1)+im(\pi_2)+\dots+im(\pi_k)$

又 $\because im(\pi_1),\dots,im(\pi_k)\subseteq V$

$\Rightarrow im(\pi_1)+\dots+im(\pi_k)\subseteq V$

$\Rightarrow V=im(\pi_1)+im(\pi_2)+\dots+im(\pi_k)$.

$\forall \vec{x}\in im(\pi_i)\cap\sum_{j\neq i}im(\pi_j)$，$\exists\vec{x_i}\in V$，s.t $\vec{x}=\pi_i(\vec{x_i})=\sum_{j\neq i}\pi_j(\vec{x_j})$

$\vec{x}=\pi_i(\vec{x_i})=\pi_i^2(\vec{x_i})=\sum_{j\neq i}\pi_i\pi_j(\vec{x_j})=\vec{0}$

$\Rightarrow im(\pi_i)\cap\sum_{j\neq i}im(\pi_j)=\{\vec{0}\}$.

$\Rightarrow V=im(\pi_1)\oplus im(\pi_2)\oplus\dots\oplus im(\pi_k)$.

(ii) $\forall\vec{x}\in V$，$\vec{x}=\mathcal{E}\vec{x}=\underset{im(\pi_1)}{\pi_1(\vec{x})}+\dots+\underset{im(\pi_k)}{\pi_k(\vec{x})}$ (1).

由 $V=im(\pi_1)\oplus\dots\oplus im(\pi_k)$. 从而 $\vec{x}$ 针对这样的分解唯一，

$\Rightarrow p_i(\vec{x})=\pi_i(\vec{x})$.

$\Rightarrow p_i=\pi_i$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{ker\phi}"'] & W \\
V/ker(\phi) \arrow[ur, "\bar{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\phi=\bar{\phi}\circ\pi_{ker(\phi)}$

回顾 (线性映射基本定理 I)

设 $\phi\in Hom(V,W)$，其中 W 是 F 上的线性空间，则存在唯一的线性单射 $\bar{\phi}$ 使得 $\phi=\bar{\phi}\circ\pi_{ker(\phi)}$

$$V/ker(\phi)\cong im(\phi)$$

应用

$$\begin{tikzcd}
V_2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{ker\psi}"'] \arrow[dr, "\psi=\pi\circ\phi"] & V_1+V_2 \arrow[d, "\pi"] \\
V_2/ker(\psi) \arrow[r, "\bar{\psi}"'] & (V_1+V_2)/V_1
\end{tikzcd}$$

$\vec{v_2}\longmapsto\vec{v_2}$，$\vec{v_1}+\vec{v_2}$，$\vec{v_2}+V_1$

$\psi: V_2\longrightarrow V_1+V_2/V_1$.

满射 $\vec{v_2}\longmapsto\vec{v_2}+V_1$.

$ker\psi=V_1\cap V_2$

$\Rightarrow V_2/V_1\cap V_2\cong(V_1+V_2)/V_1$

子空间的交与和，的基与维数 $\mathbb{R}^4$

$\vec{v_1}=(1,2,-1,-2)^t$, $\vec{v_2}=(3,1,1,1)^t$, $\vec{v_3}=(-1,0,1,-1)^T$

$\vec{w_1}=(2,5,-6,-5)^t$, $\vec{w_2}=(-1,2,-7,3)^T$

$V=\langle \vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\rangle$, $\vec{W}=\langle \vec{w_1},\vec{w_2}\rangle$

$$A=(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{w_1},\vec{w_2})=\begin{pmatrix}1&3&-1&2&-1\\2&1&0&5&2\\-1&1&1&-6&-7\\-2&1&-1&-5&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&3&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-2&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{w_2}$ 是 ~~W+W~~ $V+W$ 的一组基.

$\dim(W+V)=4$

$\dim(W\cap V)=\dim(W)+\dim(V)=2+3-4=1$.

法一：$\forall\ \vec{u}\in V\cap W \Rightarrow \vec{u}=\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\alpha_3\vec{v_3}=-\alpha_4\vec{w_1}-\alpha_5\vec{w_5}$

$\Rightarrow \alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\alpha_3\vec{v_3}+\alpha_4\vec{w_1}+\alpha_5\vec{w_5}=0$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\in\mathbb{R}$

由A可知，$\begin{cases}\alpha_5=0\\ \alpha_3-2\alpha_4=0\\ \alpha_2-\alpha_4=0\\ \alpha_1+3\alpha_4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=-3\alpha_4\\ \alpha_2=\alpha_4\\ \alpha_3=2\alpha_4\end{cases} \Rightarrow \vec{u}=\alpha_4(-3\vec{v_1}+\vec{v_2}+2\vec{v_3}) = -\alpha_4\vec{w_1}$.

$\Rightarrow V\cap W=\langle\vec{w_1}\rangle$，且 $\dim(V\cap W)=1$.

法二：设 $A\vec{x}=0$ 对应的解空间为 V，由 $\dim(V)=3$，$\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=4-3=1$

故使得 $A\vec{x}=0$ 行数最小的矩阵 A只有一行. 设其为 (x_1,x_2,x_3,x_4).

从而 $V^t\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\3&1&1&1\\-1&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$. $\Rightarrow$ 对应的齐次线性方程组只有一个线性无关的解为 $\vec{u_1}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{8}\\ \frac{3}{2}\\ \frac{1}{8}\\ 1\end{pmatrix}$. 令 $A=\vec{u_1}^t$.

设 $BW=0$

由 $\dim(W)=2$，$\Rightarrow \operatorname{rank}(B)=4-2=2$

故使得 $B\vec{x}=0$ 的解空间为 W 的行数最小的矩阵 B只有两行，设其某一行为 (y_1,y_2,y_3,y_4)

$\Rightarrow W^t\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=0$. $\Rightarrow$ 对应的齐次线性方程组只有两个线性无关的解.

$\vec{u_2}=\begin{pmatrix}\frac{23}{9}\\-\frac{1}{9}\\0\\1\end{pmatrix}$, $u_3=\begin{pmatrix}-\frac{23}{9}\\ \frac{20}{9}\\0\end{pmatrix}$. 令 $B=\begin{pmatrix}\vec{u_2}^t\\ \vec{u_3}^t\end{pmatrix}$.

故 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 对应的解空间为 $V\cap W$.

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 即 $\begin{pmatrix}\vec{u_1}^t\\ \vec{u_2}^t\\ \vec{u_3}^t\end{pmatrix}X=0$. $\Rightarrow$ 对应的齐次线性方程组只有一个线性无关的解为 $\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\-1\\ \frac{6}{5}\\1\end{pmatrix}$

从而 $V\cap W$ 的一组基为 $\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\-1\\ \frac{6}{5}\\1\end{pmatrix}$ ⊙