第5次习题课

——作业讲解与基础回顾

一、有限维(线性)向量空间的基

向量空间 = 线性空间

1.1 基的等价描述

命题1. 设 V 是有限维(线性)向量空间，$\dim V = d$. 则下列条件等价：

(1) $S \subset V$ 是 V 的一组基，即 S 是 V 中的极大线性无关组.

(2) S 是 V 的生成元中的极大线性无关组.

(3) V 中的元素可以被 S 唯一线性表出.

(4) S 线性无关且 $V = \langle S \rangle$.

(5) S 线性无关且 $|S| = d$.

(6) $V = \langle S \rangle$ 且 $|S| = d$.

1.2 基的计算

习题1 设 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

(1) 计算 $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ 的一组基，和 $\mathbb{Q}^3/V$ 的维数. (例5.2)

解：设 $A = (v_1, v_2, v_3)$，则

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\dim V = 2$. 且 v_1, v_2 线性无关，所以 v_1, v_2 是 V 的一组基.

由维数公式可知，$\dim(\mathbb{Q}^3/V) = \dim(\mathbb{Q}^3) - \dim V = 3 - 2 = 1$.

(2) 令 $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，判断 w 是否为 v_1, v_2 的线性组合?

解：设

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

所以 $w = v_1 + 2v_2$. □

练习. 设 V 是域 $\mathbb{R}$ 上有限维向量空间, v_1, v_2, v_3 是 V 的一组基, 设

$$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = v_1 + v_3, \quad w_3 = 2v_2 - v_3.$$

求 $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ 的一组基.

命题 设 V 是域 $\mathbb{R}$ 上的有限维向量空间, $v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的一组基. 设 $w_i = (v_1, \cdots, v_n)\vec{X_i}$, $X_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \cdots, k$. 则 $w_1, \cdots, w_k$ 线性相关当且仅当 $\vec{X_1}, \cdots, \vec{X_k}$ 线性相关.

证. $\Rightarrow$. 若 $w_1, \cdots, w_k$ 线性相关, 则存在不全为 0 的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 使得

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k = 0.$$

即 $\alpha_1 (v_1, \cdots, v_n)\vec{X_1} + \cdots + \alpha_k (v_1, \cdots, v_n)\vec{X_k} = 0$, 也就是

$$(v_1, \cdots, v_n)\left(\alpha_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{pmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix}\right) = 0$$

因为 $(v_1, \cdots, v_n)$ 线性无关, 所以

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{pmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\vec{X_1}, \cdots, \vec{X_k}$ 线性无关.

$\Leftarrow$ 反之同理. 即

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = 0 &\Rightarrow (v_1, \cdots, v_n)(\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_1 \vec{w_1} + \cdots + \alpha_k \vec{w_k} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{w_1}, \cdots, \vec{w_k} \text{ 线性相关} \end{aligned}$$

□

($w_1, \cdots, w_k$ 的线性相关(无关)性完全由它们的坐标决定)

练习1 解答. 依题意, $w_1 = (v_1, v_2, v_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = (v_1, v_2, v_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_3 = (v_1, v_2, v_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 因为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 线性相关, 所以 w_1, w_2, w_3 线性相关. 因为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性无关, 所以 w_1, w_2 线性无关. 则 w_1, w_2 是 W 的一组基.

□

习题2. 计算n阶斜对称矩阵构成的线性空间U的维数.

(易错点, 当 $char=2$ 时, $-1=1$, 所以矩阵的对角线元素无需全为0).

证. 设E_{ij}为i,j位为1, 其它位为0的n阶矩阵.

当$char(F)\neq 2$时, $B=\{E_{ij}-E_{ji}: i=1,\cdots,n-1, j=2,\cdots,n, i<j\}\subset U$,

且B生成U. 又因为B是线性无关集, 所以B是U的基.

则 $dim_F(U)=|B|=\frac{n(n-1)}{2}$.

当$char(F)=2$时, $B=\{E_{ij}-E_{ji}: i=1,\cdots,n-1, j=2,\cdots,n, i<j\}\cup\{E_{ii}: i=1,\cdots,n\}$

则 $B\subset U$, B生成U 且B是线性无关集. 所以B是U的基.

则 $dim_F(U)=|B|=\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

□

习题4. $U=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$, $V=\{a+b\sqrt{-1}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$.

验证U, V是$\mathbb{C}$的子空间, 并计算$dim_{\mathbb{Q}}(U+V)$. ($\mathbb{C}$看成$\mathbb{Q}$上的线性空间)

证明: 设$\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$. $a_1+b_1\sqrt{2}$, $a_2+b_2\sqrt{2}\in U$, 则

$$\alpha(a_1+b_1\sqrt{2})+\beta(a_2+b_2\sqrt{2})\in U.$$

所以U是$\mathbb{C}$的子空间. 同理V也是$\mathbb{C}$的子空间.

因为 $U=\langle 1,\sqrt{2}\rangle$, $V=\langle 1,\sqrt{-1}\rangle$, 所以 $U+V=\langle 1,\sqrt{2},\sqrt{-1}\rangle$ 生成.

易证 $1,\sqrt{2},\sqrt{-1}$在$\mathbb{Q}$上线性无关, 所以 $1,\sqrt{2},\sqrt{-1}$是$U+V$的一组基.

?

则 $dim_{\mathbb{Q}}(U+V)=3$.

□

设 $a_1\cdot 1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{-1}=0$, $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{Q}$, 去分母可得

$$b_1+b_2\sqrt{2}+b_3\sqrt{-1}=0,\ b_1,b_2,b_3\in\mathbb{Z},$$

所以$-(b_1+b_2\sqrt{2})=b_3\sqrt{-1}$, 双边平方可得 $-b_3=(b_1+b_2\sqrt{2})^2\geq 0$, 所以

$b_3=0$, 则 $b_1+b_2\sqrt{2}=0$. 因为$b_1\in\mathbb{Z}$, $b_2\sqrt{2}\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\{0\}$, 所以$b_1=b_2=0$.

习题3. 设 P_n 是 $\mathbb{R}[x]$ 中次数不超过 $n-1$ 的多项式的全体的线性空间 $(n\geq 2)$，定义

$$\phi: P_n \longrightarrow P_n$$
$$u(x) \longmapsto xu'(x)-u(x)$$

证明：ϕ 是线性映射，并求其核空间的一组基.

证明：线性映射直接验证.

设 $u(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\in P_n$，则

$$u'(x)=(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\cdots+2a_2x+a_1$$

所以

$$\begin{aligned}xu'(x)-u(x) &= (n-1)a_{n-1}x^{n-1}+(n-2)a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+2a_2x^2+a_1x\\ &\quad -a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}-\cdots-a_2x^2-a_1x-a_0\\ &= (n-2)a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2-a_0\end{aligned}$$

若 $\phi(u(x))=0$，则

$$\phi(u(x))=0 \Longleftrightarrow \begin{cases}(n-2)a_{n-1}=0\\(n-3)a_{n-2}=0\\ \vdots\\ a_2=0\\ a_0=0\end{cases} \xLeftrightarrow{\text{特征}0} a_{n-1}=\cdots=a_2=a_0=0.$$

所以 $u(x)=a_1x$，$a_1\in\mathbb{R}$，则 $\ker\phi=\langle x\rangle$.

$\square$

二. 线性映射基本定理II.

定理4.9 设 V 的一组基是 $v_1,\cdots,v_n$, W 是 F 上的线性空间, $w_1,\cdots,w_n\in W$. 则存在唯一的线性映射 $\phi: V\to W$, 使得

$$\phi(v_1)=w_1\ ,\ \cdots,\ \phi(v_n)=w_n.$$

实际上, ϕ 定义为:
$$V\longrightarrow W$$
$$\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\longmapsto\sum_{i=1}^{n}a_iw_i.$$

注: (1) $w_1,\cdots,w_n$ 不一定是 W 的基. 特别地, 当 $w_1,\cdots,w_n$ 是 W 的基时, ϕ 为同构(双射+线性).

(2) 定理4.9 说明了任意线性映射都由基的像唯一确定.

(3) 定理4.9 说明了基的像想是什么就可以是什么, 这样的线性映射总是存在.

习题5 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, W 是 V 的子空间, 则存在 $\phi\in Hom(V,V)$, 使得 $W=ker(\phi)$.

证明: 设 $w_1,\cdots,w_k$ 是 W 的一组基, 把 $w_1,\cdots,w_k$ 扩充成 V 的一组基 $w_1,\cdots,w_k,v_1,\cdots,v_s$, 则根据线性映射基本定理II, 存在 $\phi\in Hom(V,V)$, 使得 $\phi(w_i)=0$, $i=1,\cdots,k$, $\phi(v_j)=v_j$, $j=1,\cdots,s$.

实际上, ϕ 定义为:
$$V\longrightarrow V$$
$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_iw_i+\sum_{j=1}^{s}\beta_iv_i\longmapsto\sum_{j=1}^{s}\beta_iv_i.$$

则 $W\subset ker\phi$. 反之设 $v=\sum_{i=1}^{k}\alpha_iw_i+\sum_{j=1}^{s}\beta_iv_i\in V$, 且 $\phi(v)=0$. 则 $\sum_{j=1}^{s}\beta_iv_i=0$. 因为 $v_1,\cdots,v_s$ 线性无关, 所以 $\beta_1=\cdots=\beta_s=0$. 则 $v=\sum_{i=1}^{k}\alpha_iw_i\in W$. 所以 $ker\phi=W$. □

三. 直和.

命题. 设 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$. 则.

(1) 任意 $v \in V$, $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$, $v_i \in V_i$, $i=1,\cdots,k$ 的表示是唯一的.

(2) 若 $v_{i1}, \cdots v_{in_i}$ 是 V_i 的基, $i=1,\cdots,k$. 则

$$v_{11}, \cdots, v_{1n_1}, v_{21}, \cdots, v_{2n_2}, \cdots, v_{k1}, \cdots, v_{kn_k}$$

是 V 的一组基.

(3)(定义) $\forall i \in \{1,2,\cdots,k\}$.

$$V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_k) = \{0\}.$$

(注意不是 $V_i \cap V_j = \{0\}$. $i \neq j$)

$$V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_k) = \{0\} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} V_i \cap V_j = \{0\}, j \neq i.$$

(选做). 良定义用直和第一条性质, 其它直接验证即可).