

第4次习题课

(先讲第2题)

一. 置换

(关于 $1, 2, \dots, n$ 的) 置换: n 元集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的双射.

S_n : 所有关于 $1, 2, \dots, n$ 的置换构成的集合.

设 $\sigma \in S_n$, 可把 σ 表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

其中 $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$, $\{j_1, j_2, \dots, j_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

循环: $(i_1 i_2 \cdots i_k) \in S_n$ 为 S_n 中的一个循环, 其中 $i_1, \dots, i_k$ 两两不同,

表示 $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_k) = i_1$, 且 $\sigma(m) = m, m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$.

对换: 长度为 2 的循环.

(注: 长度为 1 的循环只为 e)

即 $(1) = (2) = (3) = \cdots = (n) = e$

乘法: 1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.
$$(123)(235) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

求逆: 1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.
$$(2357)^{-1} = (7532), (i_1 i_2 \cdots i_k)^{-1} = (i_k \cdots i_2 i_1)$$



3. $\sigma, \varphi \in S_n, \sigma_i \in S_n, i=1, \dots, k.$

$$(\sigma\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\sigma^{-1}, (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k)^{-1} = \sigma_k^{-1}\cdots\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$$

置换的阶: $\text{ord}(\sigma).$

$\text{ord}(\sigma)$ 为使得 $\sigma^k = e$ 的最小正整数.

命题1. 设 $\sigma \in S_n$, 则任意 $m \in \mathbb{Z}, \sigma^m = e \Leftrightarrow \text{ord}(\sigma) \mid m.$

命题2. 设 $\sigma \in S_n \setminus \{e\}$ 分解为互不相交的循环 $\tau_1, \dots, \tau_m$ 的乘积, 则 $\text{ord}(\sigma) = \text{lcm}(\text{ord}(\tau_1), \dots, \text{ord}(\tau_m)) = \text{lcm}(\text{len}(\tau_1), \dots, \text{len}(\tau_m)).$

置换的循环分解:

定理1: 任何置换都可以表示为互不相交的循环之积, 而且这种表示是“唯一的”. (当 $\sigma = e$ 时, 取 $\sigma = (1)$, 当 $\sigma \neq e$ 时, 把 σ 表示为长度大于1的互不相交的循环之积, 则不计顺序下表法唯一.)

习题1. 求出置换

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 5 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

互不相交的循环分解, 阶数和置换的符号 (讲完第三题再讲):

解: $\pi = (13875)(264)(910)$. 所以

$$\text{ord}(\pi) = \text{lcm}(5, 3, 2) = 30.$$

$$\varepsilon_\pi = (-1)^{4+2+1} = (-1)^7 = -1.$$



补充：设 $\sigma \in S_5$, $\sigma = (234)(34)(125)$, 求 σ 的阶.
 (注意! 题中的表示并不是循环分解)

解: $\sigma = (234)(34)(125)$

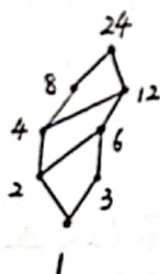
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1325),$$

所以 $\text{ord}(\sigma) = 4$.

习题2. 画出由整数24的全体正因子构成的偏序集(偏序关系由整除关系给出的图解).

复习: 偏序的三个性质: 自反性, 反对称性, 传递性, 不是所有偏序都是全序.

解: 24的正因子有 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 则哈斯图如下:



哈斯图(代数学引论P30): y 紧跟(或覆盖) x , 如果 $x < y$, 且不存在元素 z , 使得 $x < z < y$, 则用从下到上的线连接.



偶置换和奇置换:

引理 任何一个循环都是若干对换之积, 具体来说

$$(i_1 i_2 \dots i_k) = (i_k i_{k-1}) \dots (i_k i_2)(i_k i_1)$$

比如 $(4756) = (65)(67)(64)$.

定理 任何一个置换都可以表示成若干对换之积, 而且对换个数的奇偶性由该置换确定 (第5题先讲)

定义 写成奇(偶)个对换之积的置换叫做奇(偶)置换.

定义 $\forall \sigma \in S_n$, 置换 σ 的符号

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ 为偶置换} \\ -1 & \sigma \text{ 为奇置换} \end{cases}$$

推论 设 $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ 是两两不相交的循环的乘积, 则

$$\varepsilon_\sigma = (-1)^{\sum_{i=1}^k (\text{ord}(\tau_i) - 1)}$$

习题 3.1 形如 $\pi = \tau_1 \dots \tau_m$, τ_i 为两两不相交且长度大于等于 2 的循环, 令

$$m' = n - \sum_{k=1}^m l_k,$$

则 π 使 m' 个符号(或点)保持不变, 数 $d(\pi) = n - (m + m')$ 叫作 π 的减量, 验证 $\varepsilon_\pi = (-1)^{d(\pi)}$.

证:
$$(-1)^{d(\pi)} = (-1)^{n - m - (n - \sum_{k=1}^m l_k)} = (-1)^{\sum_{k=1}^m l_k - m} = (-1)^{\sum_{k=1}^m (l_k - 1)}$$

因为 $l_k = \text{ord}(\tau_k)$, 所以由讲义推论 6.29 可知

$$(-1)^{\sum_{k=1}^m (l_k - 1)} = (-1)^{\sum_{k=1}^m (\text{ord}(\tau_k) - 1)} = \varepsilon_\sigma$$



习题5 设 $n > 1$. 证明: 任意 S_n 中的置换可以写成至多 $n-1$ 个对换的乘积.

证明: 设 $\sigma \in S_n$. 当 $\sigma = e$ 时, 则 σ 可以写成 0 个对换的乘积, 则命题成立.

当 $\sigma \neq e$ 时, 设 $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m$ 表示成互不相交的长度 ≥ 2 的循环的乘积, 对于长度为 k 的循环 $(i_1 i_2 \cdots i_k)$, 有 $(i_1 i_2 \cdots i_k) = (i_{k-1} i_k) \cdots (i_2 i_3)(i_1 i_2)$, 即长度为 k 的循环可以写成 $k-1$ 个对换的乘积. 设 τ_i 的长度为 l_i , 则 σ 可以写成 $\sum_{i=1}^m (l_i - 1)$ 个对换的乘积, 又因为

$$\sum_{i=1}^m (l_i - 1) = \sum_{i=1}^m l_i - m \leq n - 1.$$

则 σ 可以写成至多 $n-1$ 个对换的乘积.

(数学归纳法)

证明: 因为对任意 $\sigma \in S_n$, 有 $\text{card}(M_\sigma) \leq n$, 所以我们只需证明 σ 是至多 $\text{card}(M_\sigma) - 1$ 个对换的乘积. 不妨设 $\sigma \neq e$, 对 $\text{card}(M_\sigma)$ 归纳. ^要证明的命题.

如果 $\text{card}(M_\sigma) = 2$, 则 σ 是一个对换的乘积, 结论成立. 假设结论对 $\text{card}(M_\sigma) < m$ 时成立, $m \geq 2, m \in \mathbb{Z}^+$, 对于 $\text{card}(M_\sigma) = m$.

设 $\sigma(j) = i, i \neq j$, 则 $i, j \in M_\sigma$, 令

$$\sigma' = \sigma \circ (i j)$$

则 $\sigma'(i) = \sigma(j) = i$, 则 $i \notin M_{\sigma'}$, 而 $\forall k \in [1, 2, \dots, n] \setminus M_\sigma$, 有 $\sigma'(k) = \sigma(k) = k$.

所以 $\text{card}(M_{\sigma'}) < \text{card}(M_\sigma) = m$, 所以根据归纳假设, σ' 是至多 $\text{card}(M_{\sigma'}) - 1$ 个对换的乘积, 则 σ 是至多

$\text{card}(M_{\sigma'}) - 1 + 1 = \text{card}(M_{\sigma'}) \leq m - 1 = \text{card}(M_\sigma) - 1$ 个对换之积. 所以对于 $\text{card}(M_\sigma) = m$ 命题也成立.



习题3.2. 计算置换

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

的符号.

解: 当 n 为偶数时,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \frac{n}{2} & \frac{n}{2}+1 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & \frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \ n)(2 \ n-1) \cdots \left(\frac{n}{2} \ \frac{n}{2}+1\right)$$

$$\text{共有 } \frac{n}{2} \text{ 个对换, 所以 } \varepsilon_\pi = (-1)^{\frac{n}{2}} = \begin{cases} 1, & n=4k, k \in \mathbb{Z} \\ -1, & n=4k+2, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

当 n 为奇数时,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \frac{n-1}{2} & \frac{n+1}{2} & \frac{n+3}{2} & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & \frac{n+3}{2} & \frac{n+1}{2} & \frac{n-1}{2} & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \ n)(2 \ n-1) \cdots \left(\frac{n-1}{2} \ \frac{n+3}{2}\right)$$

$$\text{共有 } \frac{n-1}{2} \text{ 个对换, 所以 } \varepsilon_\pi = (-1)^{\frac{n-1}{2}} = \begin{cases} 1, & n=4k+1, k \in \mathbb{Z} \\ -1, & n=4k+3, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



4. 设 $\sigma \in S_n$ 是一个置换, 对任意 $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$, 如果存在整数 $i \in \mathbb{Z}$ 使得 $a = \sigma^i(b)$, 则记 $a \sim^\sigma b$. 证明: $\sim^\sigma$ 是等价关系.

证: 自反性: $\forall a \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma^0(a) = e(a) = a$, 则 $a \sim^\sigma a$

对称性: $\forall a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$, 若 $a \sim^\sigma b$, 则 $\exists i \in \mathbb{Z}$, $\sigma^i(b) = a$, 则 $\sigma^{-i}(a) = \sigma^{-i}(\sigma^i(b)) = b$, 则 $a \sim^\sigma b$.

传递性: $\forall a, b, c \in \{1, 2, \dots, n\}$, 若 $a \sim^\sigma b$, $b \sim^\sigma c$, 则 $\exists i, j \in \mathbb{Z}$, $a = \sigma^i(b)$, $b = \sigma^j(c)$, 所以 $a = \sigma^i(\sigma^j(c)) = \sigma^{i+j}(c)$, 则 $a \sim^\sigma c$.

4.2 证明 $k \sim^\sigma l$ 的充分必要条件是 k 与 l 属于 σ 的同一个循环.

4.3 对于置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 6 & 8 & 9 & 1 & 7 & 10 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

试确定集合 $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ 的所有等价类, 并计算 $X/\sim$.

证明: ^{4.2} 设 σ 表为不相交轮换的乘积 (包括长度为 1 的循环)

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_s$$

即 $\forall k \in X$, k 属于某个循环 σ_i . 如果 $k, l \in X$, $k \sim^\sigma l$, 则 $\exists r \in \mathbb{Z}$, 使得 $\sigma^r(k) = l$. 设 k 属于循环 σ_i , 则

$$l = \sigma^r(k) = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_s)^r(k) = \sigma_i^r(k)$$

所以 l 也属于循环 σ_i . 反之若 k, l 属于同一个循环, 假设为 σ_i , 则存在 $r \in \mathbb{Z}$, 使得 $\sigma_i^r(k) = l$, 所以

$$\sigma^r(k) = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_s)^r(k) = \sigma_i^r(k) = l$$

则 $k \sim^\sigma l$.



$$4.3. \quad \sigma = (136)(481059)(2)(7)$$

$$\text{则 } \bar{1} = \{i \in X \mid i \sim 1\} = \{1, 3, 6\} \quad \bar{2} = \{2\},$$

$$\bar{4} = \{4, 8, 10, 5, 9\}, \quad \bar{7} = \{7\}$$

$$\text{所以 } S/\sim = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}\} \\ = \{\{1, 3, 6\}, \{2\}, \{4, 8, 10, 5, 9\}, \{7\}\}.$$

补充:

$$(1234) = (14)(13)(12)$$

$$(ij) = (ij)(ii)(ij)$$

6.1. 证明 S_n 中任何一个置换都可以表示为 $\{(12), (13), \dots, (1n)\}$ 中某些元素的乘积.(可重复)

$$(37) = (17)(13)(17)$$

6.2. 证明 S_n 中任何一个置换都可表示为 $\{(12), (23), \dots, (n-1, n)\}$ 中某些元素的乘积.

$$(ij) = (i, i+1)(i+1, i+2) \dots (j-1, j)(j-2, j-1) \dots (i+1, i+2)(i, i+1)$$

$$(14) = (12)(23)(34)(23)(12)$$

$$(36) = (34)(45)(56)(45)(34)$$

6.3 证明 S_n 中任何一个置换都可以表示为 $\{(12), (12 \dots n), (n, n-1 \dots 1)\}$ 中某些元素的乘积

$$(12 \dots n)(12)(n, n-1 \dots 1) = (23)$$

$$(12 \dots n)(23)(n, n-1 \dots 1) = (34)$$

$$(12 \dots n)^i (12)(n, n-1 \dots 1)^i = (1+i, 2+i) \quad i=1, \dots, n-1.$$

补充: 设 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$, 则对任意 $\sigma \in S_n$, 有

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$$

比如 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则

$$\sigma \tau \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



证明: 因为 σ 是置换, 所以 $\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

对任意 $\sigma(j) \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有

$$\begin{aligned} & \left[\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right] (\sigma(j)) \\ &= \left[\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \right] (\sigma^T \sigma(j)) \\ &= \left[\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \right] (j) \\ &= \sigma \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} (j) \right) \\ &= \sigma(i_j) = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix} (\sigma(j)) \end{aligned}$$

$$\text{则} \left[\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right] = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$$

