1.

(i) $\vec{u_1}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$(\vec{u_1},\vec{u_2})=(\vec{e_1},\vec{e_2})\overset{A}{\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}}$$

$$(\vec{v_1},\vec{v_2})=(\vec{e_1},\vec{e_2})\underset{B}{\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \cancel{A}(\vec{u_1},\vec{u_2})A^{-1}=(\vec{v_1},\vec{v_2})B^{-1}$$

$$\Rightarrow (\vec{u_1},\vec{u_2})=(\vec{v_1},\vec{v_2})B^{-1}A$$

$$(B|A)=\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&1\\1&2&1&-1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&-1\\0&1&1&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&-3\\0&1&1&1\end{array}\right)$$

$A^{-1}B$.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\1&-1&1&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\0&-2&1&\cancel{1}\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

(ii) $\vec{w}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$，$\vec{w}$在$\vec{u_1},\vec{u_2}$下坐标为 $A^{-1}\vec{w}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{w}$在$\vec{v_1},\vec{v_2}$下的坐标为 $B^{-1}\vec{w}=\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

2. $V=\mathbb{R}[x]^{(n)}$

$$\psi_i: V\longrightarrow R$$
$$f\longmapsto \frac{1}{i!}\frac{d^if}{dx^i}(0).$$

对偶空间 → 加法 数乘由 Map(V,F) 给出.

$V^*=\{\phi \mid \phi\in \mathrm{Hom}(V,F)\}$.

Thm. 设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 是V的一组基，则在V^*中存在唯一的一组基 $\underbrace{\vec{e_1^*},\dots,\vec{e_n^*}}_{\Downarrow}$ 满足 $\vec{e_i^*}(\vec{e_j})=\delta_{ij}$，$i,j\in\{1,2,\dots,n\}$

特别地，$\dim(V^*)=n$. （线性映射基本定理I 应用）

称为V^*的一组对偶基.

对偶基应用

$\forall\vec{x}\in V$, $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+\dots+x_n\vec{e_n}$, $\vec{e_i^*}(\vec{x})=x_i$

解：首先证明 $\psi_i\in V^*$，$i\in\{0,1,\dots,n-1\}$.

注意到 $\frac{d}{dx}\in\mathrm{Hom}(V,V)$，令 $\phi_0: R[x]\to\mathbb{R}$

$f\mapsto f(0)$.

故 赋值同态 $\phi_0\in\mathrm{Hom}(R[x],R)$，

$$\psi_i=\frac{1}{i!}\phi_0\circ\underbrace{\frac{d}{dx}\circ\cdots\circ\frac{d}{dx}}_{i}.$$

线性映射的复合仍为线性映射，则 $\psi_i\in V^*$.

由上述Thm可知，我们只需验证 $\psi_i(x^j)=\delta_{i,j}$，$i,j\in\{0,1,\dots,n-1\}$.

$$\psi_i(x^j)=\begin{cases}0, & j\neq i\\ 1, & j=i\end{cases}\qquad \frac{\phi_0(i!)}{i!}=\frac{i!}{i!}=1,$$

$j<i$, $\psi_i(x^j)=\frac{\phi_0(0)}{i!}=0$

$j=i$ $\psi_i(x^i)=\frac{\phi_0(i!)}{i!}=1$,

$j>i$, $\psi_i(x^j)=\frac{\phi_0(a_{ij}x^{j-i})}{i!}=0$

$a_{ij}\in\mathbb{R}$.

由 对偶基应用.

$\forall f(x) = a_n x^{n-1} + \cdots + a_0$, 这里 $\vec{e_1}=1$, $\vec{e_2}=x$, $\cdots$, $\vec{e_{n-1}} = x^{n-1}$.

$\Rightarrow \psi_i(f(x)) = a_i$, $i=0,1,\dots,n-1$

例 $p=((x+1)^{100}-(2x^2+2x-3)^{10})^2$

$$P' = 2((x+1)^{100} - (2x^2+2x-3)^{10})(100(x+1)^{99} - 10(2x^2+2x-3)^9(4x+2))$$

$$P'(0) = 4\cdot(1-3^{10})(100+10*3^9) = 40(1-3^{10})(10+3^9)$$

3. 双线性型.

定义 $f: V\times V \longrightarrow F$

$(\vec{x},\vec{y}) \mapsto f(\vec{x},\vec{y})$.

如果对任意 $\alpha,\beta\in F$ 和 $\vec{z}\in V$ 满足

$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{z},\vec{y}) = \alpha f(\vec{x},\vec{y}) + \beta f(\vec{z},\vec{y})$$

$$f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}) = \alpha f(\vec{x},\vec{y}) + \beta f(\vec{x},\vec{z})$$

则称 f 是 V 上的双线性型.

Thm. 设 V 的一组基是 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$, f 是 V 上的双线型, 则存! 矩阵 $A\in M_n(F)$, s.t

$\forall\ \vec{x}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\vec{y}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. 有

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1,\cdots,x_n)\,\underline{A}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

$$a_{ij} = f(e_i,e_j)^{(a_{ij})_{n\times n}}.$$

反过来, 设 $A\in M_n(F)$. 则

$$f: F^n\times F^n \longrightarrow F$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \longmapsto (x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

是 F^n 上双线性型, f 在标准基下的矩阵是 A.

双线性型不同基底下矩阵之间的关系

设 f 是 V 上的双线性型, f 在 V 的两组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 和 $\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$ 下矩阵分别为 A, B.

设 $(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}) = (\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$. $P\in GL_n(F)$.

$\Rightarrow B = P^tAP$.

Def. $A,B\in M_n(F)$, 若 $\exists P\in GL_n(F)$, s.t $B=P^tAP$, 则 $B\sim_c A$. (此为等价关系).

prop. $A\sim_c B$, $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

ⅱ.

设 f 是 V 上的双线性型, A 是 f 在 V 下基组基下矩阵 ~~for~~ $\operatorname{rank}(f):=\operatorname{rank}(A)$

良定义下的.

3、

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-3&0\\0&5&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, \quad A\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(f)=4$$

4. $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times m}$, 证明:

$$m-\text{rank}(E_m-AB)=n-\text{rank}(E_n-BA).$$

法一：核方法.

1. 把矩阵解释为坐标空间的线性映射
2. 利用对偶定理 $d_A+r_A=n$ 把秩转换为核的维数
3. 利用核空间的"包含"关系和线性映射基本定理(1),构造线性单射"……
4. 利用线性单射保持原像空间的维数证明等式

设 $\phi_{E_m-AB}: F^m \rightarrow F^m$, $\vec{x}\mapsto(E_m-AB)\vec{x}$

$\phi_{E_n-BA}: F^n\rightarrow F^n$, $\vec{x}\mapsto(E_n-BA)\vec{x}$

对偶定理

$$\dim(\ker(\phi_{E_m-AB}))+\text{rank}(E_m-AB)=m$$

$$\dim(\ker(\phi_{E_n-BA}))+\text{rank}(E_n-BA)=n$$

要证 $m-\text{rank}(E_m-AB)=n-\text{rank}(E_n-BA)$.

$\Leftrightarrow \dim(\ker(\phi_{E_m-AB}))=\dim(\ker(\phi_{E_n-BA}))$

记 $K_{E_m-AB}=\ker(\phi_{E_m-AB})$, $K_{E_n-BA}=\ker(\phi_{E_n-BA})$

定义 $\rho: K_{E_m-AB}\longrightarrow K_{E_n-BA}$

$\vec{x}\longmapsto B\vec{x}$

$\rho_1: K_{E_n-BA}\longrightarrow K_{E_m-AB}$

$\vec{x}\mapsto A\vec{x}$

验证 ρ_1 是良定义且单射.

则无需证 ρ 是满射,

注意到 $(E_m-AB)\vec{x}=\vec{0}\Rightarrow\vec{x}-AB\vec{x}=\vec{0}$

$\Rightarrow B\vec{x}-BA(B\vec{x})=\vec{0}$

$\Rightarrow(E_n-BA)(B\vec{x})=\vec{0}$

$\Rightarrow B\vec{x}\in K_{E_n-BA}$

⇒上述线性映射是良定义的.

$\ker(\rho)=\{\vec{x}\in K_{E_m-AB}\mid B\vec{x}=\vec{0}\}$.

取 $\vec{x}\in\ker(\rho)$, $B\vec{x}=\vec{0}$ 且 $(E_m-AB)\vec{x}=\vec{x}-A(B\vec{x})=\vec{0}$ $\Rightarrow\vec{x}=\vec{0}$

$\Rightarrow\ker(\rho)=\{\vec{0}\}$.

⇒ ρ 是单射. 下证 ρ 是满射

$\forall\vec{y}\in K_{E_n-BA}$, $(E_n-BA)\vec{y}=\vec{y}-BA\vec{y}=\vec{0}$

$\Rightarrow A\vec{y} - AB(A\vec{y}) = \vec{0}$

$\Rightarrow (E_m - AB)(A\vec{y}) = \vec{0}$

$\Rightarrow A\vec{y} \in \ker_{E_m - AB}$,

且 $P(A\vec{y}) = BA\vec{y} = \vec{y}$

$\Rightarrow$ P是满射，从而P是同构

$\Rightarrow$ 原命题成立.

法二：分块矩阵

考虑矩阵 $\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} E_m - AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \in M_{m+n}(F)$

$$\begin{pmatrix} E_m - AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{左乘}\begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}]{} \begin{pmatrix} E_m - AB & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{右乘}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ B & E_n \end{pmatrix}]{} \begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{左乘}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -B & E_n \end{pmatrix}]{} \begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n - BA \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{右乘}\begin{pmatrix} E_m & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}]{} \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n - BA \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} E_m - AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n - BA \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow n + \operatorname{rank}(E_m - AB) = m + \operatorname{rank}(E_n - BA)$

5.(i) $f \neq 0^* \Rightarrow \exists \vec{v} \in V$, s.t. $f(\vec{v}) = \alpha \in F \setminus \{0\}$.

$\forall \beta \in F$, $f(\beta\alpha^{-1}\vec{v}) = \beta\alpha^{-1}\alpha = \beta$.

$\Rightarrow$ f是满射

$\Rightarrow \dim(\operatorname{im}(f)) = 1$,

$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = n - 1$.

(ii). $\forall f, g \in V^*$, 且 $h(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x})g(\vec{y})$

$\forall \alpha, \beta \in F$, $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in V$,

$h(\alpha\vec{x_1} + \beta\vec{x_2}, \vec{y}) = f(\alpha\vec{x_1} + \beta\vec{x_2})g(\vec{y}) \overset{f \in V^*}{=\!=} (\alpha f(\vec{x_1}) + \beta f(\vec{x_2}))g(\vec{y})$

同理 $\forall \vec{y_1}, \vec{y_2} \in V$, $h(\vec{x}, \alpha\vec{y_1} + \beta\vec{y_2}) = \alpha h(\vec{x}, \vec{y_1}) + \beta h(\vec{x}, \vec{y_2})$ $= \alpha f(\vec{x_1})g(\vec{y}) + \beta f(\vec{x_2})g(\vec{y})$

$= \alpha\, h(\vec{x_1}, \vec{y}) + \beta\, h(\vec{x_2}, \vec{y})$.

$\Rightarrow$ h是F^n上的双线性型

①若 f 或 g 等于 0^*，则 $h(\vec{x}, \vec{y}) = 0^*$, $\Rightarrow \operatorname{rank}(h) = 0$.

由$f\neq 0^*$和$g\neq 0^*$，故$\exists\ \vec{u},\vec{v}\in V$，使得$f(\vec{u})\neq\vec{0}$，$g(\vec{v})\neq 0$.

$$\Rightarrow h(\vec{u},\vec{v})\neq\vec{0}$$

设V的一组基是$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$，$\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$，$\vec{y}=y_1\vec{e_1}+\cdots+y_n\vec{e_n}$，则

$$f(\vec{x})=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$$g(\vec{y})=\beta_1y_1+\cdots+\beta_ny_n=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow h(\vec{x},\vec{y})=(x_1,\cdots,x_n)\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1\cdots\beta_n)}_{A}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

$\text{rank}(h)=\text{rank}(A)\leq 1$

$\Rightarrow \text{rank}(h)=1$. $(h\neq 0^*)$.

(iii). 设h在V的某组基$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$下的矩阵为$A$.

$\text{rank}(A)=1$

$\Rightarrow\exists$非零向量$\vec{v}\in F^n$，s.t. $A=(\beta_1\vec{v},\cdots,\beta_n\vec{v})$，其中$\beta_1,\cdots,\beta_n\in F$.

设$\vec{v}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^t$，则

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1\cdots\beta_n)$$

$\forall\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e_i}$，$\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}y_i\vec{e_i}\in V$都有

$$h(\vec{x},\vec{y})=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1\cdots\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)}_{f}\underbrace{(\beta_1y_1+\cdots+\beta_ny_n)}_{g}$$

行列相伴变换

设F_{ij}是n阶第一类初等矩阵，$i,j\in\{1,\cdots,n\}$.（交换E_n中第i行和第j行）

$F_{ij}(\lambda)$是第二类初等矩阵，其中$i,j\in\{1,\cdots,n\}$，$i\neq j$，$\lambda\in F$（把E_n中第j行的倍乘λ加到第i行）

引理1. 设$A=(a_{k\lambda})\in SM_n(F)$，$B=F_{ij}^tAF_{ij}$是对称矩阵且

$$B=\begin{array}{c|ccccccc|c} & & & \overset{i}{\downarrow} & & \overset{j}{\downarrow} & & & \\ & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} & \to i\\ & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} & \to j\\ & a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} & \end{array}$$

作用：

$\downarrow$

将对角线元素进行互换

①

Pf: $$F_{ij}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & i & j & \end{array}\\ \begin{array}{c} \\ \\ i\\ j\\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & \vdots & \vdots & \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \vdots & 1 & \\ \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$F_{ij}^t=F_{ij}$$

$$B^t=(F_{ij}^tAF_{ij})^t=F_{ij}^tA^tF_{ij}=F_{ij}^tAF_{ij}=B$$

$\Rightarrow$ B为对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} & a_{1i} & & a_{1j} & \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1}\cdots & \boxed{a_{ii}} & \cdots & a_{ij} & \cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j1}\cdots & a_{ji} & \cdots & \boxed{a_{jj}} & \cdots a_{jn} \\ & \vdots & & \vdots & \\ & a_{ni} & & a_{nj} & \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{i行和第j行}]{\substack{A_1=F_{ij}^tA \\ \text{交换A中的第}}} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{ni} & & a_{nj} & & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{j列和i列}]{\text{交换}A_1\text{中}} \begin{pmatrix} & a_{ij} & \cdots & a_{ii} & \\ & \vdots & & & \\ a_{j1}\cdots & \boxed{a_{jj}} & \cdots & a_{ji} & \cdots a_{jn} \\ a_{i1}\cdots & a_{ij} & \cdots & \boxed{a_{ii}} & \cdots a_{in} \\ & \vdots & & \vdots & \\ & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \end{pmatrix}$$

引理2. 设$A=(a_{k,l})\in SM_n(F)$, $B=F_{ij}(\lambda)^tAF_{ij}(\lambda)$是对称矩阵且.

$$B=\begin{array}{c} \\ \\ i\to \\ j\to \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1j}+\lambda a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & a_{ij}+\lambda a_{i,i} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{j,1}+\lambda a_{i,1} & \cdots & a_{j,i}+\lambda a_{i,i} & \cdots & a_{j,j}+2\lambda a_{ij}+\lambda a_{i,i} & \cdots & a_{j,n}+\lambda a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,j}+\lambda a_{n,i} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Pf: $$F_{ij}(\lambda)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array}\\ & \begin{pmatrix} 1 & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 1 & \lambda & \cdots \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \cdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\end{array}$$ 把i列加到第j列, $$F_{ij}(\lambda)^t=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array}\\ & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \cdots & \\ & \lambda & \cdots 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array}\end{array}$$ λ倍 i行加到j行

$$A\xrightarrow{F_{ij}(\lambda)^t\times}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1}+\lambda a_{i1} & \cdots & a_{ji}+\lambda a_{ii} & \cdots & a_{jj}+\lambda a_{ij} & \cdots & a_{jn}+\lambda a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对对称矩阵做有限次上述两个引理中的操作得到的矩阵称为通过(初等)行列相伴变换得到的矩阵

引理3. 设域F的特征不等于2, $A\in SM_n(F)$, 如果A中对角线上元素都等于0但$A\neq 0$, 则我们可以以通过行列相伴变换把A变成对称矩阵$B=(b_{ij})$使得$b_{11}\neq 0$, 特别地, $A\sim_c B$.

Pf: 设 $A=(a_{k,l})_{n\times n}$，其中某个 $a_{ij}\neq 0$ 且 $i\neq j$，由引理2，则 $F_{i,j}(1)^t A F_{i,j}(1)$ 在第j行j列处元素为

$$a_{jj}+2a_{ij}+a_{ii}=2a_{ij}\neq 0.$$

再由引理1，令 $B=F_{i,j}^t\left(F_{ij}(1)^t A F_{ij}(1)\right)F_{ij}$ 即可.

Thm 4. 设域F的特征不等于2，$A\in SM_n(F)$，则我们可以通过初等行伴列变换得到对角矩阵.

Pf: 对n归纳. ① 当 $n=1$，A是对角阵. ✓

② 设 $n>1$ 且定理对 $n-1$ 成立，考虑 n阶对称矩阵 A

若 $A=0$，则A为对角矩阵. 下设 $A=(a_{ij})\neq 0$

由引理3，可进一步假设 $a_{1,1}\neq 0$，由引理2.

$$F_{1,n}\left(-\frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}\right)^t\cdots F_{1,2}\left(-\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}\right)^t A\,\overset{M}{\overbrace{\left(F_{1,2}\left(-\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}\right)\cdots F_{1,n}\left(-\frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}\right)\right)}}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & B \end{pmatrix}$$

其中 $B\in SM_{n-1}(F)$. 由归纳假设 $\exists Q\in GL_{n-1}(F)$，s.t Q^tBQ 为对角矩阵

令 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q\end{pmatrix}$，则

$(MP)^t AMP$ 为对角矩阵.

例. 设 $A=\begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\in SM_3(\mathbb{R})$，计算 $P\in GL_3(\mathbb{R})$，s.t $B=P^tAP$.

解:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&2&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{c_1+c_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&1&2&1&0&0\\1&0&1&1&1&0\\2&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

→ 只记录列变换

$$\xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&1&2&1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&1&1&0\\2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&2&1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&0&1&\frac{1}{2}&0\\2&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&2&1&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&0&1&\frac{1}{2}&0\\0&0&-2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3-c_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&0&1&-\frac{1}{2}&-1\\0&-\frac{1}{2}&0&1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&-2&0&0&1\end{array}\right).$$

$$\underbrace{}_{B}\qquad \underbrace{}_{\overset{\shortparallel}{P}}$$

⑦