1. 解:

$$\vec{V_1}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\-2\end{pmatrix},\ \vec{V_2}=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\5\end{pmatrix},\ \vec{V_3}=\begin{pmatrix}7\\4\\1\\-9\end{pmatrix}$$

$$2\vec{V_1}+5\vec{V_2}-3\vec{V_3}=2\begin{pmatrix}3\\1\\2\\-2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}7\\4\\1\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+5-21\\2+20-12\\4-15-3\\-4+25+27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\10\\-14\\48\end{pmatrix}$$

2. 解: (i)

$$\vec{V_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \vec{V_2}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\ \vec{V_3}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

考虑增广矩阵

$$B=(\vec{V_1},\vec{V_2}|\vec{V_3})=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-4\\0&-5&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-4\\0&0&12\end{pmatrix}$$

由 Gauss 消去法可知，B 对应的线性方程组不相容. 故 $\vec{V_3}$ 不是 $\vec{V_1}$ 和 $\vec{V_2}$ 的线性组合

(ii)

$$\vec{V_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \vec{V_2}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\ \vec{V_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$$

考虑增广矩阵

$$C=(\vec{V_1},\vec{V_2}|\vec{V_3})=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&1\\3&1&5\end{pmatrix}$$

由 Gauss 消去法可知

$$C\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&-5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

⇒ C 对应的线性方程组相容. 故 $\vec{V_3}$ 是 $\vec{V_1}$ 和 $\vec{V_2}$ 的线性组合

3.

$$A=(\vec{V_1},\vec{V_2})=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3\\0&-4\\0&-8\end{pmatrix}$$

⇒ A 对应的齐次线性方程组只有零解，故 $\vec{V_1},\vec{V_2}$ 线性无关

$$B=(\vec{V_2},\vec{V_3})=\begin{pmatrix}3&19\\2&18\\1&17\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&17\\2&18\\3&19\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&17\\0&-16\\0&-32\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

⇒ B 对应的齐次线性方程组只有零解，故 $\vec{V_2},\vec{V_3}$ 线性无关

$C=(\vec{v_1},\vec{v_3})=\begin{pmatrix}1&19\\2&18\\3&17\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&19\\0&-20\\0&-40\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&19\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ C 对应的齐次线性方程组只有零解，故 $\vec{v_1},\vec{v_3}$ 线性无关.

$D=(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})=\begin{pmatrix}1&3&19\\2&2&18\\3&1&17\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&19\\0&-4&-20\\0&-8&-40\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&19\\0&-4&-20\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ D对应的齐次线性方程有非平凡解，故 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ 线性相关.

4. 证明："$\Rightarrow$" 设 $\exists\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$, s.t $\alpha_1(\vec{v_1}+\vec{v_2})+\alpha_2(\vec{v_2}+\vec{v_3})+\alpha_3(\vec{v_1}+\vec{v_3})=\vec{0}$

$\Rightarrow(\alpha_1+\alpha_3)\vec{v_1}+(\alpha_1+\alpha_2)\vec{v_2}+(\alpha_2+\alpha_3)\vec{v_3}=\vec{0}$

$\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ 线性无关 $\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0\\\alpha_1+\alpha_2=0\\\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

$\Rightarrow\vec{v_1}+\vec{v_2},\ \vec{v_2}+\vec{v_3},\ \vec{v_1}+\vec{v_3}$ 线性无关

"$\Leftarrow$" 令 $\begin{cases}\vec{w_1}=\vec{v_1}+\vec{v_2}\\\vec{w_2}=\vec{v_2}+\vec{v_3}\\\vec{w_3}=\vec{v_1}+\vec{v_3}\end{cases}$，则 $\begin{cases}\vec{v_1}=\dfrac{\vec{w_1}-\vec{w_2}+\vec{w_3}}{2}\\\vec{v_2}=\dfrac{\vec{w_1}+\vec{w_2}-\vec{w_3}}{2}\\\vec{v_3}=\dfrac{-\vec{w_1}+\vec{w_2}+\vec{w_3}}{2}\end{cases}$

设 $\exists\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$, s.t $\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\alpha_3\vec{v_3}=\vec{0}$

$\Rightarrow\alpha_1(\vec{w_1}-\vec{w_2}+\vec{w_3})+\alpha_2(\vec{w_1}+\vec{w_2}-\vec{w_3})+\alpha_3(-\vec{w_1}+\vec{w_2}+\vec{w_3})=\vec{0}$

$(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)\vec{w_1}+(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\vec{w_2}+(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)\vec{w_3}=\vec{0}$

由 $\vec{w_1},\vec{w_2},\vec{w_3}$ 线性无关 $\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\\-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$ $\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&-2&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

$\Rightarrow\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\in\mathbb{R}^n$ 线性无关.

中的闭子空间

The Trans

BRONSTEIN

, IBM R

wn Heig

1988

5. 60, 35.

$r_0 = 60$, $r_1 = 35$, $i = 1$.

$u_0 := 1$ $\quad v_0 := 0$.

$u_1 := 0$ $\quad v_1 := 1$

$i = 2$

$q_2 = quo(r_0, r_1) = 1$, $\quad r_2 = rem(r_0, r_1) = 25$

$u_2 = u_0 - q_2 u_1 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$

$v_2 = v_0 - q_2 v_1 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$

$i = 3$

$q_3 = quo(r_1, r_2) = quo(35, 25) = 1$. $\quad r_3 = rem(r_1, r_2) = 10$.

$u_3 = u_1 - q_3 u_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$,

$v_3 = v_1 - q_3 v_2 = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$.

$i = 4$

$q_4 = quo(r_2, r_3) = 2$, $\quad r_4 = rem(r_2, r_3) = 5$

$u_4 = u_2 - q_4 u_3 = 1 - 2 \cdot (-1) = 3$

$v_4 = v_2 - q_4 v_3 = -1 - 2 \cdot 2 = -5$.

$i = 5$

$r_5 = rem(r_3, r_4) = 0$.

$\Rightarrow \gcd(60, 35) = 5$, $\quad u = 3$, $\quad v = -5$, $\quad$ s.t $\quad u \cdot 60 + v \cdot 35 = 5$

$\mathrm{lcm}(60, 35) = \dfrac{60 \cdot 35^{7}}{5} = 420$.

6. 证明：(i) 设 $h = \gcd(\gcd(a_1,\dots,a_{n-1}), a_n)$，

由 $g = \gcd(a_1,\dots,a_n) \Rightarrow g \mid a_1, \dots, g \mid a_{n-1}$

$\Rightarrow g \mid \gcd(a_1,\dots,a_{n-1})$

又由 $g \mid a_n \Rightarrow g \mid \gcd(\gcd(a_1,\dots,a_{n-1}), a_n) = h$

由 $h = \gcd(\gcd(a_1,\dots,a_{n-1}), a_n)$ 可得 $h \mid \gcd(a_1,\dots,a_{n-1})$

$\Rightarrow h \mid a_1, \dots, h \mid a_{n-1}$

又由 $h \mid a_n$ 可得 h 是 $a_1,\dots,a_n$ 的公因子

$\Rightarrow h \mid g$

$\Rightarrow h = g$

(ii) 对 n 进行归纳。

① $n=3$，$g = \gcd(\gcd(a_1,a_2), a_3)$

由Bezout关系式可得，$\exists\, v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$ s.t $v_1 a_1 + v_2 a_2 = \gcd(a_1,a_2)$ ①

$\exists\, w_1, w_2 \in \mathbb{Z}$ s.t $w_1 \gcd(a_1,a_2) + w_2 a_3 = g$ ②

将①代入②得，$w_1(v_1 a_1 + v_2 a_2) + w_3 a_3 = g$

$\Rightarrow w_1 v_1 a_1 + w_1 v_2 a_2 + w_3 a_3 = g$

令 $u_1 = w_1 v_1$，$u_2 = w_1 v_2$，$u_3 = w_3$ 即可

假设命题对 $n-1$ 成立，考虑 n 时情况。

由归纳假设可知，$\exists\, w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \in \mathbb{Z}$，s.t $w_1 a_1 + w_2 a_2 + \dots + w_{n-1} a_{n-1} = \gcd(a_1,\dots,a_{n-1})$

由Bezout关系式可知，$\exists\, v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$，s.t $v_1 \gcd(a_1,\dots,a_{n-1}) + v_2 a_n = \gcd(\gcd(a_1,\dots,a_{n-1}), a_n)$

即 $v_1(w_1 a_1 + w_2 a_2 + \dots + w_{n-1} a_{n-1}) + v_2 a_n = g$

$\Rightarrow v_1 w_1 a_1 + v_1 w_2 a_2 + \dots + v_1 w_{n-1} a_{n-1} + v_2 a_n = g$

令 $u_1 = v_1 w_1$，$u_2 = v_1 w_2$，…，$u_{n-1} = v_1 w_{n-1}$，$u_n = v_2$ 即可

综上，$\forall n \geq 3$ $\exists\, u_1,\dots,u_n \in \mathbb{Z}$，s.t $u_1 a_1 + \dots + u_n a_n = g$

(法二) 设 $S = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$，易知 $S \cap \mathbb{Z}^+$ 非空，由良序原理可知 $S \cap \mathbb{Z}^+$ 存在最小元，设为 h，则 $h = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i$

下证 $h = \underbrace{\gcd(a_1,\dots,a_n)}_{g}$

由 $g \mid a_1, \dots, g \mid a_n$ 可知，$g \mid h$。

claim：h 为 $a_1,\dots,a_n$ 的公因子

假设：$h \nmid a_1$，则 $\exists\, r \in \{1,\dots,h-1\}$，s.t

$a_1 = mh + r$

$\Rightarrow r = a_1 - mh = a_1 - \sum_{i=1}^{n} u_i a_i \in S$

此时 $r < h$，与 h 是最小元矛盾

$\Rightarrow h \mid a_1$

同理可得 $h \mid a_2, \dots, h \mid a_n$

$\Rightarrow h \mid g$

$\Rightarrow g = h$

①

的子空间

Def. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $U \neq \emptyset$. 如果对 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 满足:

①(加法封闭性) $\vec{x}+\vec{y} \in U$

②(数乘封闭性) $\alpha\vec{x} \in U$

则称 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间.

eg. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 其对应的 n 元齐次线性方程组的解空间是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间.

prop. ① 设 Λ 是一个指标集, 对 $\forall \lambda \in \Lambda$, U_λ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间, 则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ 也是子空间 (例1.19)

② 设 $U_1, \dots, U_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 则 $\underbrace{U_1 + \cdots + U_k}_{U}$ 也是子空间, 且 $U_i \subset U$ (例1.24)

③ U_1, U_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间, 则 $U_1 \cup U_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 $\Longleftrightarrow$ $U_1 \subseteq U_2$ 或 $U_2 \subseteq U_1$ (例1.23).

eg. 考虑齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

设 $V_i = \mathrm{sol}(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0)$, $i = 1, 2, \dots, m$. 则 $\mathrm{sol}(H) = \bigcap_{i=1}^{m} V_i$

Def. $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, U 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $\vec{v}+U$ 称为一个线性流形.

例. $B \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$, L 是 B 对应的 n 元线性方程组, H 是 B 的前 n 列组成矩阵对应的齐次线性方程组. 如果 L 相容, 则

$$\underbrace{\mathrm{sol}(L)}_{\text{一个线性流形}} = \underbrace{\vec{v}}_{L\text{的一个特解}} + \mathrm{sol}(H),$$

Def. $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$. 由 S 中元素的所有线性组合构成的集合称为由 S 生成的子空间, 记为 $\langle \underbrace{S}_{\text{所有元素视为一组生成元}} \rangle$.

Rmk $\langle S \rangle$ 是子空间

eg $U+W = \langle U \cup W \rangle$.

Def(直和). U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 若 $U \cap W = \{0\}$, 则称 $U+W$ 为直和, 记为 $U \oplus W$.

prop. U, V, $\mathbb{R}^n$ 中子空间, $U+V$ 是直和 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall \vec{x} \in U+V$, $\exists! \, \vec{u} \in U, \vec{v} \in V$, s.t.

$$\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$$

Pf: "$\Rightarrow$"

设 $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}'+\vec{v}'$, $\vec{u},\vec{u}'\in U$, $\vec{v},\vec{v}'\in V$.

$\Rightarrow \underbrace{\vec{u}-\vec{u}'}_{U} = \underbrace{\vec{v}'-\vec{v}}_{V}$

$\Rightarrow \vec{u}-\vec{u}' \in U\cap V$.

$\Rightarrow \vec{u}-\vec{u}'=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{u}=\vec{u}'$

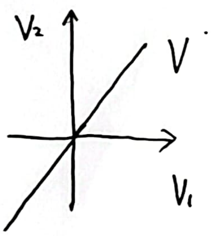
同理, $\vec{v}=\vec{v}'$, 故唯一性得证.

"$\Leftarrow$" 假设 $U+V$ 不是直和, 则存在非零向量 $\vec{x}\in U\cap V$, 故 $\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{x}+(-\vec{x})$

这与 $\vec{0}$ 分解的唯一性相矛盾 $\rightarrow\leftarrow$.

$\Rightarrow U+V$ 是直和.

应用: 设 V, V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 分配律 ($V\cap(V_1+V_2)=V\cap V_1+V\cap V_2$) 不一定成立.



$V_1=\left\{\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$.

$V_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix} \middle| b\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$V=\left\{\begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} \middle| c\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$.

claim: $V_1+V_2=\mathbb{R}^n$

$V_1, V_2\subseteq\mathbb{R}^n \Rightarrow V_1+V_2\subseteq\mathbb{R}^n$

$\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\in V_1$, $\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\in V_2$. $\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V_1+V_2$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2\subseteq V_1+V_2$

$\Rightarrow V_1+V_2=\mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{aligned}&V\cap(V_1+V_2)=V\cap\mathbb{R}^2=V=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle.\\&V\cap V_1+V\cap V_2=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\rangle+\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\rangle.\end{aligned}\right\}\Rightarrow V\cap(V_1+V_2)\neq V\cap V_1+V\cap V_2.$$

注: 当 $V_1\subset V$ 时, 则分配律成立, 即 $V\cap(V_1+V_2)=V\cap V_1+V\cap V_2$

或 $V_2\subset V$.

Pf: "$\subset$" $\forall\vec{x}\in V\cap(V_1+V_2)$, 下证 $\vec{x}\in V\cap V_1+V\cap V_2$.

$\vec{x}\in V$ 且 $\vec{x}\in V_1+V_2$, 则 $\exists\ \vec{v}_1\in V_1$, $\vec{v}_2\in V_2$, s.t. $\vec{x}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$

$V_1\subset V \Rightarrow \underline{\vec{x}-\vec{v}_1\in V} \Rightarrow \vec{v}_2\in V\cap V_2$

显然 $\vec{v}_1\in V\cap V_1$. $\Rightarrow \vec{x}\in V\cap V_1+V\cap V_2 \Rightarrow V\cap(V_1+V_2)\subseteq V\cap V_1+V\cap V_2$

∵ $\forall \vec{x} \in V\cap V_1 + V\cap V_2$，下证 $\vec{x}\in V\cap(V_1+V_2)$

$\forall \vec{x}\in V\cap V_1+V\cap V_2$，$\exists\ \vec{v_1}\in V\cap V_1,\ \vec{v_2}\in V\cap V_2$，s.t $\vec{x}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$

$\vec{v_1},\vec{v_2}\in V \Rightarrow \vec{x}\in V$

$\vec{v_1}\in V_1, \vec{v_2}\in V_2 \Rightarrow \vec{x}\in V_1+V_2$

$\Rightarrow \vec{x}\in V\cap(V_1+V_2)$

$\Rightarrow V\cap(V_1+V_2)=V\cap V_1+V\cap V_2$

基

Def $U\subset\mathbb{R}^n$ 是子空间且 $U\neq\{\vec{0}\}$. 若对 $\forall\vec{u}\in U$，$\exists!\ \alpha_1,\cdots,\alpha_d\in\mathbb{R}$，s.t $\vec{u}=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i\vec{u_i}$，则称 $\{\vec{u_1},\cdots,\vec{u_d}\}$ 为 U 的一组基.

Prop $\{\vec{u_1},\cdots,\vec{u_d}\}$ 为 U 的一组基 $\Leftrightarrow$ $\{\vec{u_1},\cdots,\vec{u_d}\}$ 是 U 的极大线性无关组

problem 求：有限个元素生成的子空间一组基

Solution 利用 Gauss 消去法：

Thm.（基扩充定理）子空间 U 的任何一组线性无关组均可以扩充成 U 的一组基.

应用 设 $\vec{v_1}=(1,-1,2,4)^t$，$\vec{v_2}=(0,3,1,2)^t$，$\vec{v_3}=(3,0,7,14)^t$，$\vec{v_4}=(1,-1,2,0)^t$，$\vec{v_5}=(2,1,5,6)^t$.

① $\vec{v_1}$ 与 $\vec{v_2}$ 线性无关

② 将 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 扩充成一极大线性无关组.

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&3&0\\2&1&7\\4&2&14\end{pmatrix}\\ \vec{v_1}\ \ \vec{v_2}\ \ \vec{v_3}\end{array}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-4r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&3&3\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

相容

$\Rightarrow \vec{v_3},\vec{v_1},\vec{v_2}$ 线性相关. $\Rightarrow \vec{v_3}$ 不在含 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 的极大线性无关组里.

$$(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_4})=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&3&-1\\2&1&2\\4&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-4r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&0\\0&1&0\\0&2&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

不相容

$\Rightarrow \vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_4}$ 线性无关， $\Rightarrow \vec{v_4}$ 在包含 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 的一个极大线性无关组

$$(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_4},\vec{v_5})=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-1&3&-1&1\\2&1&2&5\\4&2&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-4r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&3&0&3\\0&1&0&1\\0&2&-4&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&1\\0&0&-4&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

相容

$\Rightarrow \vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_4},\vec{v_5}$ 线性相关.

$\Rightarrow \{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_4}\}$ 是 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{v_4},\vec{v_5}$ 的一组极大线性无关组