第七周习题课

——知识点回顾与作业讲解

一、知识点回顾

1. 坐标变换

设 V 是 F 上的线性空间，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 V 的一组基，则任意 $v \in V$，有

$$v = (e_1, e_2, \cdots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (e_1, \cdots, e_n)X,\quad X \in F^n.$$

坐标变换：若有 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 V 的另一组基，设

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n)P,\quad P \in GL_n(F).$$

若 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ 分别是 $v \in V$ 在两组基下的坐标，则有

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

证明：设 $v = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)P\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

$\quad\; v = (e_1, e_2, \cdots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

所以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. □

例：设 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，设 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，则

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (e_1, e_2)P,\quad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

比如 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (e_1\ e_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，而 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2)P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

□

2. 线性函数（对偶空间）.

设 V 是 F 上的 n 维线性空间，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 V 的一组基，则存在 V^* 的一组基 $e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*$，满足

$$e_i^*(e_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$$

我们称 $e_1^*, \cdots, e_n^*$ 为 $e_1, \cdots, e_n$ 的对偶基.

注：设 $v\in V$，$v=(e_1, \cdots, e_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.　　0. $\dim V^*=\dim V$，

1. e_i^* 作用在 v 上相当于取 v 的第 i 位坐标，即 $e_i^*(v)=x_i$.
2. 任意 $f\in V^*$，有 $f=\alpha_1e_1^*+\alpha_2e_2^*+\cdots+\alpha_ne_n^*$. 则 f 实际上可以写为

$$f(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

$$=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n，\text{其中 } \alpha_i=f(e_i).$$

思考：若 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的另一组基，且 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)=(e_1\cdots e_n)P$，问 $\varepsilon_1^*, \cdots, \varepsilon_n^*$ 和 $e_1^*, \cdots, e_n^*$ 的关系.

3. 双线性函数.

设 $f(X, Y)$ 是 V 上的双线性函数，$e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的一组基. 则 $f(X, Y)$ 形如

$$f(X, Y)=f\left((e_1, \cdots, e_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, (e_1, \cdots, e_n)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)$$

$$=(x_1\cdots x_n)\begin{pmatrix}f(e_1,e_1) & \cdots & f(e_1,e_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f(e_n,e_1) & \cdots & f(e_n,e_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jf(e_i, e_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(e_i, e_j)x_iy_j.$$

坐标变换：设$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是V的另一组基，且

$$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(e_1,\cdots,e_n)P$$ （当$e_1,\cdots,e_n$为标准基时，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$实际为P的列向量）

设$f(X,Y)$在$e_1,\cdots,e_n$下的矩阵为A，则$f(X,Y)$在$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵为$P^tAP$.

证明：

$$f(X,Y)=f\left((e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},(e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)$$

$$=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

则

$$f(X,Y)=f\left((\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix},(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\right)$$

$$=\left((u_1,\cdots,u_n)P^t\right)A\left(P\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\right)$$

$$=(u_1,\cdots,u_n)P^tAP\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}.$$ □

4. 对称双线性函数

$$f\left((e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},(e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$，A为对称矩阵.

☆ 定理 存在V中的一组基，使得$f(X,Y)$在这组基下的矩阵为对角矩阵.

作业1. 设

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

计算 $P\in GL_n(\mathbb{Q})$ 和对角矩阵 B 使得 $P^tAP=B$.

解: 考虑双线性函数 $f(X,Y)=(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$$=x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2+x_2y_3+x_3y_2$$

令 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, 则 $f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)=1+1-1=1\neq 0$. 令

$$W=\{v\in\mathbb{Q}^3 \mid f(v,\varepsilon_1)=0\}.$$

因为 $f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\varepsilon_1\right)=x_1+x_2-x_2+x_3=x_1+x_3=0$, 所以

$$W=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\langle w_1,w_2\rangle.$$

令 $g=f|_{W\times W}$, 则 $g(w_1,w_1)=f(w_1,w_1)=0$,

$g(w_1,w_2)=f(w_1,w_2)=0$.

$g(w_2,w_1)=f(w_2,w_1)=0$.

$g(w_2,w_2)=f(w_2,w_2)=-1$

所以 g 在 w_1,w_2 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$, 则 f 在 ε_1,w_1,w_2 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$, 所以取 $P=(\varepsilon_1,w_1,w_2)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$,

则 $P^tAP=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$.

□

5. 二次型

$$\{\text{对称双线性函数}\} \longleftrightarrow \{\text{二次型}\}$$

$$f(X,Y) \longmapsto f(X,X)$$

$$\frac{1}{2}\left(f(X+Y,X+Y)-f(X,X)-f(Y,Y)\right) \longleftarrow q(X)$$

设 $q(X)$ 是 V 上的二次型，$e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基，则 $q(X)$ 可以写成.

(定理8.5)

$$q\left((e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{1\le i\le j\le n}\alpha_{ij}x_ix_j，\text{其中 } A \text{ 为对称矩阵.}$$

$a_{ii}=\alpha_{ii}$，$a_{ij}=\frac{\alpha_{ij}}{2}$，$i\neq j$

注：实际上，$q\left((e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，当 A 不是对称矩阵时

也是二次型，因为

$$(q(X))_{1\times1}=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

两边转置得 $(q(X))_{1\times1}=(x_1,\cdots,x_n)A^t\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

相加除以2得 $q(X)=(x_1,\cdots,x_n)\frac{A+A^t}{2}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，则 $\frac{A+A^t}{2}$ 为对称矩阵

习题2. 解：①计算 $PAP^t=D$，D 为对角.

② 令 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(e_1,\cdots,e_n)P=P$.

则 $q\left((\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\right)=(z_1,\cdots,z_n)P^tAP\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}=(z_1,\cdots,z_n)D\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$.

③ 规范型为 $(z_1,\cdots,z_n)D\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$，其中 $\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

$$q(X) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$
$$= (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

计算 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，令 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (e_1\ e_2\ e_3)P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

则 $q(z_1\varepsilon_1 + z_2\varepsilon_2 + z_3\varepsilon_3) = (z_1\ z_2\ z_3)P^tAP\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = (z_1\ z_2\ z_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

$$= z_1^2 - z_2^2$$

则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 q 的规范基，

$$q(z_1\varepsilon_1 + z_2\varepsilon_2 + z_3\varepsilon_3) = z_1^2 - z_2^2.$$

为 q 的规范基.（其中 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$）.

□

4. (1) 验证双线性： $f(\alpha A_1 + \beta A_2, B) = \alpha f(A_1, B) + \beta f(A_2, B)$

$f(A, \alpha B_1 + \beta B_2) = \alpha f(A, B_1) + \beta f(A, B_2)$

对称性：$f(A, B) = f(BA)$.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix}$，则.

$$f(A, B) = tr(AB^t) = tr\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

$= (a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22})\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix}$，所以 f 在 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. $rank(f) = 4$

选做：$\phi: V \longrightarrow V^*$

$\qquad\qquad v \longmapsto l_v$,

其中 $l_v: V \longmapsto F$

$\qquad\qquad x \longmapsto f(x,v)$

ϕ 是线性的：$\forall \alpha, \beta \in F$，$v_1, v_2 \in V$，我们有

$$\phi(\alpha v_1 + \beta v_2) = l_{\alpha v_1 + \beta v_2}$$

可以验证任意 $x \in V$，有

$$l_{\alpha v_1 + \beta v_2}(x) = (\alpha l_{v_1} + \beta l_{v_2})(x).$$

所以 $l_{\alpha v_1 + \beta v_2} = \alpha l_{v_1} + \beta l_{v_2} = \alpha \phi(v_1) + \beta \phi(v_2)$.

$$(e_1, \cdots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; \|$$

ϕ 是单射：设 $\phi(v) = \phi(v')$，则 $l_v = l_{v'}$，所以对任意 $x \in V$，

有 $l_v(x) = l_{v'}(x)$，即

$$(x_1 \cdots x_n) A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}.$$

取 $x_i = e_i$ 为~~标准基~~，则 $A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}$，因为 A 可逆，所以 $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}$.

$= (e_1 \cdots e_n)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

因为 $\dim V = \dim V^*$，所以 ϕ 也为满射，所以 ϕ 为线性同构。

$\square$