第六至七周习题

1.

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \vec{v}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}-5\\2\\9\end{pmatrix}$$

解：(i) $$(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3\\0&-4\\0&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 对应的齐次线性方程组只有零解，

$\Rightarrow \vec{v}_1,\vec{v}_2$ 线性无关

(ii) $$\begin{pmatrix}1&3&-5\\2&2&2\\3&1&9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&-5\\0&-4&12\\0&-8&24\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&3&-5\\0&-4&12\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-5\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 对应的线性方程组相容

$\Rightarrow \vec{v}\in\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle$

设 $\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2$，则 $\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2=-5\\ \alpha_2=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=4\\ \alpha_2=-3\end{cases}$

$\Rightarrow \vec{v}=4\vec{v}_1-3\vec{v}_2$

(iii) 取 $\vec{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&2&0\\3&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-4&0\\0&-8&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 线性无关，故 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

2. 证明：设 $\exists\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\in\mathbb{R}$, s.t.

$$\beta_1\vec{w}_1+\beta_2\vec{w}_2+\cdots+\beta_s\vec{w}_s=\vec{0}$$

思路证明：若 $\mathbb{R}^{1\times k}$ 中向量组 $V_i=(\alpha_{i,1},\alpha_{i,2},\cdots,\alpha_{i,n},\alpha_{i,n+1},\cdots,\alpha_{i,k}),i=1,2,\ldots,s$. 线性相关，则缩短后的向量组 $W_i=(\alpha_{i,1},\alpha_{i,2},\cdots,\alpha_{i,n}),i=1,2,\cdots,s$ 线性相关

故 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 满足方程组
$$\begin{cases}\beta_1\alpha_{1,1}+\beta_2\alpha_{2,1}+\cdots+\beta_s\alpha_{s,1}=0\\ \beta_1\alpha_{1,2}+\beta_2\alpha_{2,2}+\cdots+\beta_s\alpha_{s,2}=0\\ \vdots\\ \beta_1\alpha_{1,n}+\beta_2\alpha_{2,n}+\cdots+\beta_s\alpha_{s,n}=0\\ \beta_1\alpha_{1,n+1}+\beta_2\alpha_{2,n+1}+\cdots+\beta_s\alpha_{s,n+1}=0\\ \vdots\\ \beta_1\alpha_{1,k}+\beta_2\alpha_{2,k}+\cdots+\beta_s\alpha_{s,k}=0\end{cases}$$

从而 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 满足
$$\begin{cases}\beta_1\alpha_{1,1}+\beta_2\alpha_{2,1}+\cdots+\beta_s\alpha_{s,1}=0\\ \beta_1\alpha_{1,2}+\beta_2\alpha_{2,2}+\cdots+\beta_s\alpha_{s,2}=0\\ \vdots\\ \beta_1\alpha_{1,n}+\beta_2\alpha_{2,n}+\cdots+\beta_s\alpha_{s,n}=0\end{cases}$$

即满足 $\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+\cdots+\beta_s\vec{v}_s=\vec{0}$

$\Rightarrow \beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_s=0$

$\Rightarrow \vec{w}_1,\vec{w}_2,\cdots,\vec{w}_s$ 线性无关.

3. 证明：$\mathbb{R}^n$ 中的向量组 $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ 张成 $\mathbb{R}^n$ 当且仅当它们是线性无关的.

证："$\Rightarrow$" 假设 $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ 是线性相关，则 $\exists \{\vec{x}_{i_1}, \cdots, \vec{x}_{i_d}\} \subsetneq \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ $(d<n)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

则 $\dim(\mathbb{R}^n) = d < n$，矛盾. 故 $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ 线性无关

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ 线性无关，由于 $\mathbb{R}^n$ 中任意 $n+1$ 个向量线性相关，

法一：故对 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$，$\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 不全为0的实数，s.t.

$$\alpha \vec{x} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}.$$

若 $\alpha = 0$，则 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$，与 $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ 线性无关相矛盾

$\Rightarrow \alpha \neq 0$，$\therefore x = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha}\right) \vec{x}_i \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle$.

$\Rightarrow \mathbb{R}^n \subseteq \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle$

显然 $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$，故 $\mathbb{R}^n = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle$

法二：$\because \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ 线性无关，故 $\dim(\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$.

又由于 $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$，故 $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \mathbb{R}^n$.

4. 证明：$V_1 + V_2$ 是直和 $\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\} \Leftrightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = 0$.

$\Longleftrightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ （维数公式）.

5. (1)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & -2 & 5 \\ 0 & 18 & 16 & -5 & 13 \\ 0 & -54 & -54 & 15 & -39 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & -2 & 5 \\ 0 & 18 & 16 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 3$.

(2)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(B) = 4$

6. U在V中的补不是唯一确定的.

设 $V=\langle \vec{v_1},\dots,\vec{v_s}\rangle$, $s\le n$, 这里 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_s}$ 是V的一组基.

不妨设 $U=\langle \vec{v_1},\dots,\vec{v_t}\rangle$, $t<s$.

令 $W_1=\langle \vec{v_{t+1}},\dots,\vec{v_s}\rangle$. 显然 $U+W_1=V$

$\forall \vec{v}\in U\cap W_1$, 则 $\exists\ \alpha_1,\dots,\alpha_t,\beta_{t+1},\dots,\beta_s\in\mathbb{R}$, s.t.

$$\vec{v}=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\vec{v_i}=\sum_{i=t+1}^{s}\beta_i\vec{v_i}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{t}\alpha_i v_i-\sum_{i=t+1}^{s}\beta_i\vec{v_i}=0$$

$$\Rightarrow \alpha_i=0,\ i=1,\dots,t$$
$$\beta_i=0,\ i=t+1,\dots,s$$

$$\Rightarrow \vec{v}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow U\cap W_1=\{0\}$$

$$\Rightarrow U\oplus W_1=V$$

令 $W_2=\langle \vec{v_1}+\vec{v_{t+1}},\dots,\vec{v_s}\rangle$, 显然 $U+W_2=V$.

$\forall \vec{v}\in U\cap W_2$, 则 $\exists\ \alpha_1,\dots,\alpha_t,\beta_{t+1},\dots,\beta_s\in\mathbb{R}$, s.t.

$$\vec{v}=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\vec{v_i}=\beta_{t+1}(\vec{v_1}+\vec{v_{t+1}})+\dots+\beta_s\vec{v_s}$$

$$\Rightarrow (\alpha_1-\beta_{t+1})\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\dots+\alpha_t\vec{v_t}+\beta_{t+1}\vec{v_{t+1}}+\dots+\beta_s\vec{v_s}=\vec{0}$$

由 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_s}$ 线性无关, 得 $\alpha_1-\beta_{t+1}=0$, $\alpha_2=\dots=\alpha_t=0$,
$\beta_{t+1}=\dots=\beta_s=0$

$$\Rightarrow \alpha_1=\beta_{t+1}=0$$

$$\Rightarrow \vec{v}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow U\oplus W_2=V$$

从而 W_1 W_2 均为 U 在 V中的补

claim $W_1\neq W_2$.

若 $\vec{v_1}+\vec{v_{t+1}}\in W_1$, 则 $\exists\ \alpha_{t+1},\dots,\alpha_s\in\mathbb{R}$, s.t. $\vec{v_1}+\vec{v_{t+1}}=\alpha_{t+1}\vec{v_{t+1}}+\dots+\alpha_s\vec{v_s}$

$$\Rightarrow \vec{v_1}+(1-\alpha_{t+1})\vec{v_{t+1}}-\dots-\alpha_s\vec{v_s}=\vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{v_1},\vec{v_{t+1}},\dots,\vec{v_s}$ 线性相关 $\rightarrow\ \Leftarrow$.

$\Rightarrow \vec{v_1}+\vec{v_{t+1}}\notin W_1$. 但 $\vec{v_1}+\vec{v_{t+1}}\in W_2$.

反例: $\mathbb{R}^2$

$V=\mathbb{R}^2$

$U=\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle$

$W_1=\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle$ $\quad\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$W_2=\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$ $\quad\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\overset{a-b}{=}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

维数

Def. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 子空间，$\{\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d}\}$ 是 U 的一组基，则 $\dim(U) := d$

注：$\dim(\{\vec{0}\}) = 0$

Prop ① $U \subset W$，则 $\dim(U) \leq \dim(W)$. 等号取到当且仅当 $\dim(U) = \dim(W)$

② $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$

应用：证明：$U, W \subset \mathbb{R}^n$ $(n>1)$ 子空间，且 $U \neq W$，$\dim(U) = \dim(W) = n-1$. 证明：

$\dim(U+W) = n$，$\dim(U \cap W) = n-2$

Pf：利用维数公式可知，$\dim(W+U) + \dim(W \cap U) = \dim W + \dim V = 2n-2$

$$W, U \subseteq W+U \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow n-1 = \dim(W) \leq \dim(W+U) \leq n$$

$$\Rightarrow n-2 \leq \dim(W \cap U) \leq n-1$$

$W \cap U \subseteq W, U$，$\Rightarrow \dim(W \cap U) \leq \dim(W) = n-1$

由 $W \neq U$ $\Rightarrow \dim(W \cap U) < n-1$

$$\Rightarrow \dim(W \cap U) = n-2.$$
$$\dim(W+U) = n$$

Prop. ① $V_1 + V_2$ 为直和 $\Longleftrightarrow$ ② $\forall \vec{x} \in V_1 + V_2$，$\exists!\ \vec{x_1} \in V_1$，$x_2 \in V_2$，s.t. $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$

$\Longleftrightarrow$ ③ $\dim(V_1+V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$

$\Longleftrightarrow$ ④ 若 $\vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{0}$，$\vec{x_1} \in V_1$，$\vec{x_2} \in V_2$，则 $\vec{x_1} = \vec{0}$，$\vec{x_2} = \vec{0}$（即零向量分解唯一性）

Pf：①$\Leftrightarrow$②，①$\Leftrightarrow$③ ✓.

下证 ②$\Leftrightarrow$④.

②$\Rightarrow$④：由 $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$，由向量分解的唯一性可知，$\vec{x_1} = \vec{0}$，$\vec{x_2} = \vec{0}$.

④$\Rightarrow$②. 假设 $\forall \vec{x} \in V_1 + V_2$ 存在两组分解，即 $\exists\ x_1, x_1' \in V_1$，$x_2, x_2' \in V_2$，s.t.

$$\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{x_1'} + \vec{x_2'} \Rightarrow \vec{x_1} - \vec{x_1'} = \vec{x_2'} - \vec{x_2}$$

$$\Rightarrow (\vec{x_1} - \vec{x_1'}) + (\vec{x_2} - \vec{x_2'}) = \vec{0}$$

由于零向量分解唯一性，可知，$\vec{x_1} - \vec{x_1'} = \vec{0}$，$\vec{x_2} - \vec{x_2'} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{x_1} = \vec{x_1'}, \quad \vec{x_2} = \vec{x_2'}$$

$\Rightarrow$ 向量分解的唯一性.

矩阵的秩

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$V_r(A):=\langle \vec{A_1},\cdots,\vec{A_m}\rangle$，其中 $\vec{A_i}=(a_{i,1},\cdots,a_{i,n})$，行秩：$\dim(V_r(A))$

$V_c(A):=\langle \vec{A^{(1)}},\cdots,\vec{A^{(n)}}\rangle$，其中 $\vec{A^{(i)}}=\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i}\end{pmatrix}$，列秩：$\dim(V_c(A))$

Thm $\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，它的行秩等于列秩，定义为矩阵的秩，记为 $\mathrm{rank}(A)$

prop. $\mathrm{rank}(A)\le\min\{m,n\}$.

矩阵的转置

Def $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，矩阵A的转置是在 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 中的矩阵，它的第j行第i列的元素 $=a_{ij}$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$，记为 A^t

prop $\mathrm{rank}(A^t)=\mathrm{rank}(A)$.

线性方程组和矩阵的秩

(定性部分)

Thm 设 L 是以矩阵 $B=(A|\vec{b})\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ 为增广矩阵的n元线性方程组

(i) L 相容 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

(ii) L 确定 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=n$.

(定量部分)

Thm (对偶定理，方程组版). 设 H 是以 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组. 则

$$\dim(\mathrm{sol}(H))+\mathrm{rank}(A)=n.$$

例 $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix}$，

试用平面上n条直线所成的集合的几何性质给出 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$ 的条件

解：考虑 $A^t=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}$，$B^t=\left(\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{array}\right)$

$$\begin{cases} \alpha_1x_1+\beta_1x_2=\gamma_1 \\ \alpha_2x_1+\beta_2x_2=\gamma_2 \\ \quad\vdots \\ \alpha_nx_1+\beta_nx_2=\gamma_n \end{cases}$$

A^t：二元齐次线性方程组的系数矩阵

B^t：二元非齐次线性方程组的增广矩阵

⑨

非齐次线性方程组相容 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A^t)=\mathrm{rank}(B^t)$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

$\Updownarrow$

$\exists(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, s.t $\alpha_i x_0+\beta_i y_0=\gamma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 成立.

$\Updownarrow$

平面上n条直线 $\alpha_i x+\beta_i y=\gamma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 有交点.

例. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+x_4=0 \end{cases}$ H

解：该方程的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A)=2$,

由对偶定理可知, $\dim(\mathrm{sol}(H))=4-2=2$.

故H 等价于 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ -2x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$ 等价于 $\begin{cases} x_1=x_3-x_2=\frac{x_3-x_4}{2} \\ x_2=\frac{x_3+x_4}{2} \end{cases}$

故H的通解为 $\begin{pmatrix} \frac{x_3+x_4}{2} \\ \frac{x_3+x_4}{2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $x_3, x_4\in\mathbb{R}$.

令 $x_3=1, x_4=0$, 有解 $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 令 $x_3=0, x_4=1$, 有解 $\vec{v}_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

故 $\mathrm{sol}(H)=\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle=\{\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2 \mid \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}$.

总结: 计算 H(齐次线性方程组)的解空间的一组基的方法:

① 对 A(系数矩阵)作初等行变换, 得到阶梯形矩阵 A',

若 A' 有r个非零行, 则 $\mathrm{rank}(A)=r$, 从而 $\dim(\mathrm{sol}(H))=n-r$.

② 变换之后的矩阵记为 H', $H\Leftrightarrow H'$, 其中 H' 为以 A' 为系数的矩阵

记 $\{x_{k_{r+1}},\cdots,x_{k_n}\}=\{x_1,\cdots,x_n\}\setminus\{x_{k_1},\cdots,x_{k_r}\}$.

令 $x_{k_{r+1}}=1, x_{k_{r+2}}=0, \cdots, x_{k_n}=0$ 代入 (H'), 得到一 $\vec{v}_1$

$\vdots$

$x_{k_{r+1}}=0, x_{k_{r+2}}=0, \cdots, x_{k_n}=1$ 代入 (H') 得 $\vec{v}_{n-r}$

则 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-r}$ 线性无关

$\Rightarrow \mathrm{sol}(H)=\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-r}\rangle$

且 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-r}$ 是 $\mathrm{sol}(H)$ 的一组基.

例 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-x_2+x_4=1 \end{cases}$ L.

解：该方程组的增广矩阵为

$B\ (A|\vec{b})$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

于是 $\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(A)=2$.

$\Rightarrow L$ 相容.

$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-x_2+x_4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ -2x_2+x_3+x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1+\dfrac{x_3-x_4}{2} \\ x_2=\dfrac{x_3+x_4}{2} \end{cases}$

令 $x_3=x_4=0$，我们得到 $\vec{v}=(1,0,0,0)^t$ 是 L 的一个特解

由之前的例题，可得 L 对应的齐次线性方程组的解空间为 $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle$.

$\Rightarrow \mathrm{sol}(L)=\vec{v}+\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle$.

坐标之间的线性映射

Def. 映射 $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，如果对 $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$，$\alpha \in \mathbb{R}$，有

$\phi(\vec{x}+\vec{y})=\phi(\vec{x})+\phi(\vec{y})$

$\phi(\alpha\vec{x})=\alpha\phi(\vec{x})$

则称 ϕ 是线性映射

prop $\phi(\vec{0}_n)=\vec{0}_m$

例. 零映射 $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto \vec{0}_m$.

恒同映射 $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto \vec{x}$.

数乘映射：$\psi_\lambda: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto \lambda\vec{x}$

例. $\mathbb{R}^2$. $\phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$.

$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\phi\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}\right)=\phi\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta\tilde{x}_1 \\ \alpha x_2+\beta\tilde{x}_2 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta\tilde{x}_1 \\ \alpha(x_1+x_2)+\beta(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2) \end{pmatrix}$

$=\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_1+\tilde{x}_2 \end{pmatrix}$

$=\alpha\phi(\vec{x})+\beta\phi(\vec{y})$

$\Rightarrow \phi$ 是线性映射.

线性

例 $\{x_1+x_2-x_3=1$

例 $\phi_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

Prop. $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性映射. ϕ的核: $\phi^{-1}(\{\vec{0}_m\})$ ($\mathbb{R}^n$的子空间), ϕ的像: $\mathrm{im}(\phi)$, t. ($\mathbb{R}^m$子空间)

① $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ 线性相关 $\Rightarrow \phi(\vec{v_1}), \cdots, \phi(\vec{v_k})$ 线性相关.

② U是$\mathbb{R}^n$的子空间, 则$\phi(U)$是$\mathbb{R}^m$的子空间.

③ W是$\mathbb{R}^m$的子空间, 则$\phi^{-1}(W)$是$\mathbb{R}^n$的子空间

④ U是$\mathbb{R}^n$的子空间, 则$\dim(U) \geq \dim(\phi(U))$ (①的应用)

Prop. $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性映射, 则 ϕ是单射 $\Leftrightarrow \ker(\phi) = \{\vec{0}_n\}$.

Rmk. 单射情况下, $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ 线性无关 $\Rightarrow \phi(\vec{v_1}), \cdots, \phi(\vec{v_k})$ 线性无关.

Thm.

(对偶定理, 线性映射版) 设 $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是线性映射, 则

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$$

例 设$\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是线性双射, ϕ^{-1}是ϕ的逆映射, 证明

(1) ϕ^{-1}是线性映射 (2) $n=m$

Pf: (1) $\phi^{-1}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\forall \vec{y_1}, \vec{y_2} \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \exists! \vec{x_1}, \vec{x_2} \in \mathbb{R}^n$, s.t $\phi(\vec{x_1}) = \vec{y_1}, \phi(\vec{x_2}) = \vec{y_2}$.

$\Rightarrow \vec{x_1} = \phi^{-1}(\vec{y_1}), \vec{x_2} = \phi^{-1}(\vec{y_2})$

由ϕ的线性性可知, $\phi(\alpha\vec{x_1} + \beta\vec{x_2}) = \alpha\phi(\vec{x_1}) + \beta\phi(\vec{x_2}) = \alpha\vec{y_1} + \beta\vec{y_2}$

$\Rightarrow \phi^{-1}(\alpha\vec{y_1} + \beta\vec{y_2}) = \alpha\vec{x_1} + \beta\vec{x_2} = \alpha\phi^{-1}(\vec{y_1}) + \beta\phi^{-1}(\vec{y_2})$.

$\Rightarrow \phi$是线性映射

(2) 由对偶定理可知, $\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$.

ϕ是单射 $\Rightarrow \ker(\phi) = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(\ker(\phi)) = 0 \Rightarrow \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$

ϕ是满射 $\Rightarrow \mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}^m \Rightarrow \dim(\mathrm{im}(\phi)) = m$

$\Rightarrow n = m$.