

习题1. 计算题:

1. 给几个向量判断是否线性无关 (例1.9, 例1.10)
2. 给几个向量, 判断另一个向量能否由这几个向量线性组合.
写成 (例1.4, 例1.5)
3. 求子空间 $\langle w_1, w_2, \dots, w_k \rangle$ 的一组基 ^{和维数} (例2.11) p3.

设 $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

求 $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$ 的一组基 (答案在第3页),

4. 求矩阵的秩. (初等变换不改变矩阵的秩) (例3.9)
5. 基的扩充 (习题1.3) (P4)
- * 6. 求齐次线性方程组的解空间的一组基 (例4.7)
求非齐次线性方程组的解流形 (例4.9)
7. 求 $U \cap V$ 的基, 求 $U + V$ 的基.

验证类型的题目: 1. 验证 U 是子空间.
2. 验证 ϕ 是线性映射.

(结论)

证明题: 讲义中命题及其证明思路.



补充: 设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 为列向量

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ 线性相关

$\Leftrightarrow A = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$, 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组有非平凡解

$\Leftrightarrow \text{rank}(A) < k$

$$\text{rank}(A) = \dim(V_r(A)) = \dim(V_c(A))$$

基和维数, 空间 $0 \in U, \alpha \vec{u} \in U, \vec{u} + \vec{u}' \in U$
(子空间定义要记住)

定义(基) 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间且 $U \neq \{0\}$, $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d\} \subset U$
称为 U 的一组基, 如果 $\forall \vec{u} \in U, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}, \text{ s.t.}$
 $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_d \vec{u}_d$

命题 2.9. $U \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间且 $U \neq \{0\}$, 则 $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d\}$ 是
 U 的一组基当且仅当 $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d\}$ 是 U 的
极大线性无关组 (① $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d$ 线性无关, ② $\forall \vec{v} \in U, \vec{v} \in \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d \rangle$)
①+② $\Leftrightarrow$ ①+②' ②' $\forall \vec{v} \in U$, 有 $\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d$ 线性相关.

定义(维数) $\dim(\{0\}) = 0$. 当 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间, $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d\}$ 是 U 的
一组基, 则 $\dim U = d$.

命题 1 子空间 $U, V \subset \mathbb{R}^n$, 若 $U \subset V$, 则 $\dim U \leq \dim V$, 若 $U \subset V$ 且 $\dim U = \dim V$,
则 $U = V$.

命题 2 设 $\dim(U) = d$, 则 U 中任意大于 d 个向量线性相关.

证: 设 $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset U, k > d$. 设 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d$ 是 U 的一组基, 则
 $\vec{v}_i$ 可以被 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d$ 线性表出, $i = 1, \dots, k$. 由 $d < k$ 以及线
性组合引理可知, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 线性相关.



(张成)
注 k 个线性无关的向量生成的子空间维数为 k .
(相关) $< k$.

命题 (基的等价描述). 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间, $\dim U \neq 0$

设 $\{u_1, \dots, u_k\} \subset U$, 只要满足以下条件任意两条, 则 $\{u_1, \dots, u_k\}$ 是 U 的一组基:

① $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ (这个符号不意味 $u_1, \dots, u_k$ 是基)

② $u_1, \dots, u_k$ 线性无关.

③ $k = \dim U$.

证明: ① + ②: 当 ① ② 满足时, $u_1, \dots, u_k$ 是 U 的极大线性无关组, 则由命题 2.9 可知, $\{u_1, \dots, u_k\}$ 是 U 的一组基. (注解 2.5)

① + ③ $\Rightarrow$ ① + ② 反证, 若 $u_1, \dots, u_k$ 线性相关, 取 $\{u_1, \dots, u_k\}$ 的极大线性无关组 $\{v_1, \dots, v_s\} \subsetneq \{u_1, \dots, u_k\}$, 则 $s < k$ 而且 $\{u_1, \dots, u_k\} \subset \langle v_1, \dots, v_s \rangle$, 所以

$$U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_s \rangle.$$

又因为 $v_1, \dots, v_s \in U$, 所以 $\langle v_1, \dots, v_s \rangle \subset U$. 则

$$U = \langle v_1, \dots, v_s \rangle.$$

但 $\langle v_1, \dots, v_s \rangle$ 的维数为 s , U 的维数为 d , 而 $s < k = d$, 矛盾.

② + ③ $\Rightarrow$ ① + ③ 设 $V = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, 则 $\dim V = k = \dim U$.

因为 $V \subset U$, $\dim V = \dim U$, 所以由命题 2.14 可知 $V = U$.

即 $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

□

取 $U = \mathbb{R}^n$, 即为第 3 题. (习题 3 答案见第 7 页)



命题 $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ 为列向量, 设 $A = (v_1, \dots, v_k)$, 则

$$v_1, \dots, v_k \text{ 线性无关} \Leftrightarrow \text{rank}(A) = k$$

$\Rightarrow$

证明: 根据 $\text{rank}(A)$ 的定义, $v_1, \dots, v_k$ 线性无关 $\Rightarrow \dim(V_c(A)) = k$
 $\Rightarrow \text{rank}(A) = k$.

$$\left(\text{rank}(A) = \underset{\text{row}}{\dim(V_r(A))} = \underset{\text{column}}{\dim(V_c(A))} \right)$$

$\Leftarrow$ 若 $v_1, \dots, v_k$ 线性相关, 则 $\dim V_c(A) < k$. 矛盾.

(再讲求矩阵的秩的题目)(前面讲)

设 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, 把 v_1, v_2 扩充成 $\mathbb{R}^5$ 的一组基.

求 $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩.

$$\xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 8 & 1 \\ -2 & 7 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -15 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩为 2.

找极大线性无关组: 设 $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

的极大线性无关组.



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(其中一组)极大线性无关组为 v_1, v_2, v_4 .

上面
因为通过^v相同
的行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1, v_2, v_4 \text{ 线性无关}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1, v_2, v_4, v_3 \text{ 线性相关}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1, v_2, v_4, v_5 \text{ 线性相关}$$

所以 v_1, v_2, v_4 是一组极大线性无关组.

设 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, 把 v_1, v_2 扩充成 R^5 的一组基.

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 取 } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{rank}(B) = 5$
 $\Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ 线性无关.
 $\Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ 是 R^5 的一组基.



习题2. 设 $v_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$, $i=1, 2, \dots, s$ 线性无关, 证明:
 $\vec{w}_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}, \alpha_{i,n+1}, \dots, \alpha_{ik})$, $i=1, 2, \dots, s$ 也线性无关.

证明: 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R}$, 且

$$a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2 + \dots + a_s \vec{w}_s = 0.$$

$$\text{则} \begin{cases} a_1 \alpha_{11} + a_2 \alpha_{21} + \dots + a_s \alpha_{s1} = 0 \\ \dots \\ a_1 \alpha_{1n} + a_2 \alpha_{2n} + \dots + a_s \alpha_{sn} = 0 \\ a_1 \alpha_{1,n+1} + a_2 \alpha_{2,n+1} + \dots + a_s \alpha_{s,n+1} = 0 \\ \dots \\ a_1 \alpha_{1,k} + a_2 \alpha_{2,k} + \dots + a_s \alpha_{s,k} = 0. \end{cases}$$

由于 $v_1, \dots, v_s$ 线性无关, 所以前 n 的方程构成的方程组只有平凡解, 即 $a_1 = a_2 = \dots = a_s = 0$, 所以整个方程组也只有平凡解. 所以 $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s$ 线性无关.

□

习题4. (讲义命题2.18). 维数公式.

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U+V) + \dim(U \cap V)$$

习题5. 不一定唯一, 比如 $V = \mathbb{R}^2$, $U = \langle (1, 0) \rangle$, $W = \langle (0, 1) \rangle$
 $W' = \langle (1, 1) \rangle$, 则 $V = U \oplus W = U \oplus W'$.



直和：设 U, W 是 R^n 的子空间. 如果 $U \cap W = \{0\}$,
则称 $U+W$ 是直和, 记为 $U \oplus W$.

命题 1.36. 设 U, V 是 R^n 的子空间, 则 $U+V$ 是直和当且仅当
对任意 $x \in U+V$, 存在唯一的 $u \in U, v \in V$, 使得
 $x = u + v$.

命题. 设 $u_1, \dots, u_k$ 是 U 的基, $v_1, \dots, v_s$ 是 V 的基, 则
 $U+V$ 是直和 $\Leftrightarrow u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_s$ 是 $U+V$ 的基.

证: $\Rightarrow U+V$ 是直和 $\Rightarrow \dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V)$.

又因为 $U+V = \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_s \rangle$, $k+s = \dim(U) + \dim(V)$
 $= \dim(U+V)$

则 $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_s$ 是 $U+V$ 的基.

反证.
 $\Leftarrow$ 若 $U+V$ 不是直和, 则 $\dim(U+V) < \dim(U) + \dim(V)$.

所以 $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_s$ 线性相关, 与它是一组基矛盾. $\square$



3. 证明: $\mathbb{R}^n$ 的向量组 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ 张成 $\mathbb{R}^n$ 当且仅当它们是线性无关的.

证: $\Rightarrow$ 反证. 若 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ 线性相关, 取 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ 的极大线性无关组 $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s\} \subset \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$, 则 $s < n$. 由讲义中推论 2.10 可知 $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s\}$ 是 $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle = \mathbb{R}^n$ 的一组基, 得 $\dim \mathbb{R}^n = s < n$, 矛盾.

$\Leftarrow$ 设 $V = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle$, 则 $\dim V = n$ 且 $V \subseteq \mathbb{R}^n$. 由讲义中命题 2.14 可知 $V = \mathbb{R}^n$, 即 $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle = \mathbb{R}^n$.

□

