1. $q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3$.

解：q对应的对称矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&-1\\ \frac{1}{2}&-1&0\end{pmatrix}$.

$$A\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&-1\\ \frac{1}{2}&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&-1\\ -\frac{1}{2}&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+\frac{1}{2}r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\ 0&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+\frac{1}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\ 0&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\ 0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-3c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&-\frac{1}{4}&0\\ 0&0&2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 签名为 $(2,1)$

$S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in SM_2(\mathbb{R})$.

2. (i)

$$(S|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{c_1+c_2}\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&-\frac{1}{2}&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1}\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{array}\right).$$

$\Rightarrow S\sim_c\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}$.

合同不改变签名 $\Rightarrow$ S不是正定阵.

$\Rightarrow$ 不存在 $P\in GL_2(\mathbb{R})$, s.t $S=P^tP$.

(ii) 由于 $\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}$ 满秩，故 $\exists\ Q\in GL(\mathbb{C})$, s.t $Q^tSQ=E$. $\Rightarrow S=(Q^t)^{-1}Q^{-1}=(Q^{-1})^tQ^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{\sqrt{2}}{2}r_1}\left(\begin{array}{cc|cc}\sqrt{2}&0&1&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{\sqrt{2}}{2}c_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2}i\,r_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}i&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{\sqrt{2}i\,c_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}i\\0&1&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{array}\right)$$
$$\underbrace{\hphantom{\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\frac{\sqrt{2}}{2}i}}_{Q}$$

令 $P=Q^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}i&-\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{C})$，则 $S=P^tP$.

Def.

3. 设 $q: V \to F$ 称为 V 上的二次型，如果

(i) 对于任意的 $\vec{v} \in V$, $q(\vec{v}) = q(-\vec{v})$

(ii) 对于任意的 $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

配极

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y}))$$

是 V 上的对称双线型.

Prop. q 是二次型 $\Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}_2^+(V)$,
s.t $\forall \vec{x} \in V$, $q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$, 此时.
q 的配极是 f.

$$q(-\vec{x}) = tr(-x\cdot(-x)^t) = tr(\vec{x}\cdot x^t) = q(\vec{x}).$$

$\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\frac{1}{2}(q(X+Y) - q(X) - q(Y)) = \frac{1}{2}(tr((X+Y)(X+Y)^t) - tr(XX^t) - tr(YY^t))$$

$$\overset{tr线性}{=} \frac{1}{2}(tr(\underline{XX^t} + XY^t + YX^t + \underline{YY^t} - \underline{XX^t} - \underline{YY^t}))$$

$$= \frac{1}{2}tr(XY^t + YX^t) := f(X, Y)$$

容易验证 $\frac{1}{2}tr(XY^t + YX^t)$ 是双线性型, $f(X,Y) = f(Y,X)$ 是显然的.

$\Rightarrow q$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的二次型.

对 $\forall X = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, $X \neq 0$

$$XX^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$tr(XX^t) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 + \sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2 \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

$\forall X \neq 0$, $q(\vec{x}) > 0$.

$\Rightarrow q$ 是正定的.

$\Rightarrow q$ 的签名为 $(n^2, 0)$

4. Pf: 假设 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, s.t $\vec{x}^t A \vec{x} \geq 0$, 则 A 半正定.

$\Rightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{R})$, s.t $A = B^t B$,

$\Rightarrow det(A) = det(B)^2 \geq 0$ $\rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, s.t $\vec{x}^t A \vec{x} < 0$

5 Pf: ① $m=0$, E 是正定阵.

$\rightarrow$ Thm 设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$, 则
(i) A 半正定 $\Leftrightarrow \exists\ B\in M_n(\mathbb{R})$, s.t $A=B^tB$
(ii) A 正定 $\Leftrightarrow \exists\ B\in GL_n(\mathbb{R})$, s.t $A=B^tB$.

② $m>0$, A 正定, 则 $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$, s.t $A=P^tP$.

下面用数学归纳法证明 A^m 正定, $m\in\mathbb{Z}^+$

① 当 $m=1$ ✓

② 假设 $m-1$ 成立, 来看 m 的情况

$$A^m=P^t\underbrace{PP^t}_{B}P\ \ m\cdots PP^tP=P^tB^{m-1}P,\ 其中\ B=PP^t$$

从而 B 正定的., 由归纳假设, B^{m-1} 是正定阵, 由上可知, $A^m\sim B^{m-1}$

$\Rightarrow$ A^m 是正定阵

③ $m<0$, $A^m=(A^{-m})^{-1}$

Claim: $B\in SM_n(\mathbb{R})$ 正定, 则 B^{-1} 正定.

由 B 正定, 则 $\exists\ P\in GL_n(\mathbb{R})$, s.t $B=P^tP$.

$\Rightarrow B^{-1}=(P^tP)^{-1}=P^{-1}(P^{-1})^t$

$\Rightarrow B^{-1}$ 正定.

从而 A^{-m} 正定 $\Rightarrow$ A^m 正定.

6.(i) Pf: q 是二次型, $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$, 令 $f(\vec{x},\vec{y})=f_1(\vec{x})f_1(\vec{y})+\cdots+f_s(\vec{x})f_s(\vec{y})-f_{s+1}(\vec{x})f_{s+1}(\vec{y})$
$------\ f_{s+t}(\vec{x})f_{s+t}(\vec{y})$.

$f_i\in Hom(V,V)$., $i=1,2,\cdots,s+t$

$\Rightarrow f(\vec{x},\vec{y})\in\mathcal{L}_2^+(V)$

$q(\vec{x})=f(\vec{x},\vec{x})$ $\Rightarrow$ $q(\vec{x})$ 是二次型.

(ii) 设 q 在某组基下 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k,\cdots\varepsilon_n$ 下的标准型为

$$q=y_1^2+\cdots+y_k^2-y_{k+1}^2\ ---\ -y_{k+l}^2$$

假设 $s<k$.

令 $U=\langle\varepsilon_1\ \varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k\rangle$, $\dim(U)=k$.

设齐次线性方程组 $\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)=0\\ \vdots\\ f_s(x_1,\cdots,x_n)=0.\end{cases}$ 的解空间为 V,

$\dim(U) \geq n-s$ · , $\dim(V+U) \leq n$

$\dim(V\cap U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V+U) \geq n-s+k-n = k-s > 0$

取 $\exists\ \vec{x} \neq \vec{0}$ 且 $\vec{x} \in V\cap U$

由 $\vec{x} \in U$，则 $q(\vec{x}) > 0$

由 $\vec{x} \in V$，则 $q(\vec{x}) \leq 0$ · $\rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow\ k \leq s$ ·

$-q = f_{s+1}^2 + \cdots + f_{s+t}^2 - (f_1^2 + \cdots + f_s^2)$.

$-q$ 的正惯性指数 等于 q 的负惯性指数 l.

由上可知，$l \leq t$、

Jacobi公式与正定矩阵

$A \in M_n(F)$. 矩阵A的子式

$$M\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ i_1, i_2, \cdots, i_k \end{pmatrix},$$

特别地，

$$M\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, k \end{pmatrix}$$

其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ 称为A的一个k阶主子式. 称为A的k阶顺序主子式

Thm (Jacobi公式) 设 $A \in SM_n(F)$. 设 $\Delta_0 = 1$, Δ_i是A的i阶顺序主子式. 如果$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ 都非零，则

$$A \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right).$$

Thm 设$A \in SM_n(\mathbb{R})$. 设Δ_k是A的k阶顺序主子式，$k=1,2,\cdots,n$. 则下列命题等价

(i) A正定

(ii) A的任何k阶主子式都大于0.

(iii) $\Delta_1 > 0, \cdots, \Delta_n > 0$

计算 $\mathbb{R}^n$上二次型 $P_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j$ 的符号差.

解: P_n在标准基下的矩阵

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 1 & 1 & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$n=2$时，$A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&1\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1}\begin{pmatrix}2&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

签名是$(1,1)$

$n=3$时，

$$A_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

签名是$(1,2)$

现考虑一般情况.

$$A_n\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&2&\cdots&2&2\\1&0&1&\cdots&&&1\\ \vdots&\vdots&&&&&\\1&1&&&&&\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2}\begin{pmatrix}2&1&2&2&\cdots&2&2\\1&0&1&1&\cdots&1&1\\2&1&0&&&\vdots&\vdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&&0&\\2&1&1&\cdots&&&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&1&2&2&\cdots&2&2\\0&-\frac{1}{2}&0&0&\cdots&0&0\\2&1&0&\cdots&&&\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&&&\\2&1&1&&&&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-\frac{1}{2}c_1}\begin{pmatrix}2&0&2&2&\cdots&2&2\\0&-\frac{1}{2}&0&0&\cdots&0&0\\2&0&0&&&&\\ \vdots&\vdots&&\ddots&&&\\2&0&&&&&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}2&0&2&2&\cdots&2&2\\0&-\frac{1}{2}&0&0&\cdots&0&0\\0&0&-2&-1&\cdots&&-1\\2&&&&&&\\ \vdots&&&&&&\\2&0&1&1&\cdots&0&1\\2&0&1&1&\cdots&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-c_1}\begin{pmatrix}2&0&0&2&\cdots&2&2\\0&-\frac{1}{2}&0&0&\cdots&0&0\\0&0&-2&-1&\cdots&-1&-1\\2&0&-1&0&\cdots&-1&-1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\2&0&-1&\vdots&&0&1\\2&0&-1&1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_n\sim_c\begin{pmatrix}M&0\\0&N\end{pmatrix}，其中M=\begin{pmatrix}2&\\&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$N=-\begin{pmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{pmatrix}$$

$$\det(N)=(-1)^{n-2}\begin{vmatrix}n-1&1&1&\cdots&1\\n-1&2&1&\cdots&1\\ \vdots&1&2&\cdots&1\\ &\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n-1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-2}\begin{vmatrix}n-1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&&\ddots&&0\\0&0&\cdots&&1\end{vmatrix}=(-1)^{n-2}(n-1)$$

设 Δ_i 是 N 的顺序主子式，$i=1,2,\cdots,n-2$，且 $\Delta_0=1$. 则 $\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}<0$，$i=1,2,\cdots,n-2$.

由 Jacobi 公式，

$$N\sim_c \mathrm{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\cdots,\frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-3}}\right)\sim_c -E_{n-2}.$$

于是 $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ 和 $Q\in GL_{n-2}(\mathbb{R})$.

$$P^tA_nP=\begin{pmatrix}M&0\\0&N\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}E_2&0\\0&Q\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}M&0\\0&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_2&0\\0&Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{matrix}2&0\\0&-\frac{1}{2}\end{matrix}&O\\O&-E_{n-2}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ P_n 的签名是 $(1,n-1)$.

Hardamard 乘积 (children product)

$A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$. $B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$

定义 $A\odot B=(a_{ij}\cdot b_{ij})_{n\times n}$.

例 $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$

prop. (i) $A\odot(B+C)=A\odot B+A\odot C$

$A\odot B=B\odot A$

(iii) $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\odot A=A\odot\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}=A$

$\Rightarrow$ $\left(M_n(\mathbb{R}),+,\odot,O_{n\times n},\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\1&\cdots&\cdots&1\\1&\cdots&\cdots&1\end{pmatrix}\right)$ 为交换环.

(Schur 定理) 设 A, B 是 n 阶 (半) 正定矩阵，则 $A\odot B$ 也是(半)正定矩阵.

证: A, B 对称，$\therefore$ $a_{ij}=a_{ji}$，$b_{ij}=b_{ji}$，$\forall\ 1\le i,j\le n$)

$A\odot B$ 第 i 行第 j 列元素为 $a_{ij}b_{ij}$. 第 j 行第 i 列元素为 $a_{ji}b_{ji}$

$\Rightarrow$ $a_{ij}b_{ij}=a_{ji}b_{ji}$

$\Rightarrow$ $A\odot B$ 是对称矩阵

由B是半正定的，可知，∃矩阵 $M=(m_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, s.t $B=M^tM$

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}\, m_{k,j}$$

设 $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)^t\in\mathbb{R}^n$，则

$$\vec{x}^{\,t}(A\odot B)\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{n}m_{k,i}m_{k,j}\Big)x_ix_j$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\underbrace{(m_{k,i}x_i)}_{y_{k,i}}\underbrace{(m_{k,j}x_j)}_{y_{k,j}}=\sum_{k=1}^{n}(y_{k,1},\dots,y_{k,n})\,A\underbrace{\begin{pmatrix}y_{k,1}\\ \vdots\\ y_{k,n}\end{pmatrix}}_{\vec{y_k}}$$

① A，B半正定，则 $\vec{y_k}^{\,t}A\vec{y_k}\geq 0$，$k=1,2,\dots,n$

$\Rightarrow \vec{x}^{\,t}(A\odot B)\vec{x}\geq 0$

$\Rightarrow$ $A\odot B$ 半正定

② A，B正定，则M可逆，设 $\vec{x}\neq\vec{0}$，不妨设 $x_1\neq 0$.

假设 $\vec{y_k}=0$ $\forall k=1,\dots,n$，则 $y_{k,1}=0$. $\forall k=1,\dots,n$.

$\Rightarrow m_{k,1}x_1=0$，$\forall k=1,\dots,n$.

$\Rightarrow m_{k,1}=0$，$\forall k=1,\dots,n$.

$\Rightarrow$ M不可逆.

$\Rightarrow \exists\, l\in\{1,2,\dots,n\}$, s.t $\vec{y_l}\neq\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{y_l}^{\,t}Ay_l>0$

$\Rightarrow \vec{x}^{\,t}(A\odot B)\vec{x}>0$

$\Rightarrow$ $A\odot B$ 正定.